Investigación Operativa

Laura M. Castro Souto

Primer Cuatrimestre
Curso 2000/2001

Índice de cuadros

Capítulo 1

Modelos de programación lineal y aplicaciones

En la asignatura de **Investigación Operativa** vamos a llevar a cabo el *planteamiento* y *resolución* de cierto tipo de problemas.

Dado un problema real, trataremos de *modelizarlo* a fin de obtener un problema matemático a cuya solución podamos llegar aplicando un algoritmo. Una vez obtenida dicha solución, podremos extraer conclusiones sobre el problema real inicial.

$$\textsf{Problema real} \xrightarrow{\text{modelización}} \textsf{Problema matemático} \xrightarrow{\text{algoritmo}} \textsf{Solución}$$

El paso más difícil es el de *modelización*, por la gran cantidad de variables y restricciones que existen en la vida real (¿cuáles consideramos?). La mayoría de las veces, nosotros partiremos ya del problema matemático, al que trataremos de dar solución.

1.1. Formulación de modelos de programación lineal

Un **problema de programación** se refiere en general al uso o asignación (reparto) de una serie de recursos (dinero, material, trabajadores, etc.) de la "mejor manera posible", es decir, de manera que o se maximicen las ganancias o se minimicen los costes.

Para que un *problema de programación* se diga **lineal** ha de tener dos características:

1. La regla ó criterio para seleccionar los mejores valores de las variables usadas para modelizar el problema se puede escribir como una *ecuación lineal* (sin potencias de grado mayor que uno, sin productos cruzados, etc.), que habrá que maximizar/minimizar. A esta función se la llama **función del objetivo**.

2. Las relaciones existentes entre las variables (también llamadas *restricciones*) se pueden escribir como un conjunto de ecuaciones ó inecuaciones lineales. A este conjunto de ecuaciones se le denomina **conjunto de restricciones**.

¿Cómo "escribir" un problema de programación lineal?

Debemos conocer:

1) Las variables del problema (*variables de decisión*).

2) El conjunto de restricciones.

3) La función del objetivo que habrá que maximizar/minimizar.

El problema del transporte como problema de programación lineal

Es uno de los problemas más famosos del campo de la matemática y también de la investigación operativa. Se puede tratar o enfocar como un problema de programación lineal, y se enunciaría de la siguiente manera:

"Tengamos m almacenes y n tiendas (m y n datos conocidos). Se quieren transportar unidades de un determinado producto de los almacenes a las tiendas. Cada almacén tiene unas determinadas existencias y cada tienda tiene una determinada demanda. Se conoce asimismo el coste unitario del transporte de un producto desde cada almacén hasta cada tienda.

Formular un problema de programación lineal para minimizar los costes de transporte[1]".

Datos:

$$\begin{array}{lll} m & \text{almacenes} & \\ n & \text{tiendas} & \\ a_i & i = 1..m & \text{(existencias)} \\ b_j & j = 1..n & \text{(demandas)} \\ c_{ij} & \begin{array}{l} i = 1..m \\ j = 1..n \end{array} & \end{array}$$

Tenemos una matriz $m \times n \Rightarrow m \times n$ variables, que representan las unidades a transportar del almacén i a la tienda j:

$$x_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1..m \\ j = 1..n \end{array}$$

En cuanto a las restricciones, tenemos:

- No negatividad: $x_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall i, j$

- Una restricción para cada almacén: del almacén i sólo pueden salir a_i unidades de producto, o, lo que es lo mismo, lo que sale del almacén i no puede superar a_i.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

[1]Téngase en cuenta que en la vida real esto no tiene por qué ser así (lineal); no resulta tan trivial ni lógico que el transporte de 10 unidades cueste 10 veces más que el transporte de una sola.

- Una restricción para cada tienda: a la tienda j deben llegar al menos b_j unidades de producto, es decir, lo que llega a la tienda j debe ser mayor o igual que b_j.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_i \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

En cuanto la *función a minimizar*, es, obviamente, la suma de los productos de lo que cuesta transportar cada unidad por las unidades que se transportan:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Donde los sumatorios son intercambiables, puesto que las sumas son finitas.

1.2. Solución gráfica de P.P.L. con dos variables

Cuando nos enfrentamos a un problema de programación lineal con dos variables resulta generalmente sencillo y cómodo resolverlo mediante el método gráfico. Lo veremos desarrollando un ejemplo.

Sea el **p.p.l.**[2]:

$$\text{Min} \qquad z = 40x_1 + 36x_2$$

$$\text{sujeto a} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &\leqslant 8 \\ x_2 &\leqslant 10 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geqslant 45 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

En primer lugar dibujaremos el conjunto de puntos que cumplen las restricciones, es decir, que sean *soluciones factibles* (conjuntos de valores para cada una de las variables). Ya que tratamos con dos variables, utilizaremos unos ejes cartesianos.

Por ejemplo, en este caso son soluciones factibles:

$$x_1 = 8$$
$$x_2 = 10$$

$$x_1 = 7$$
$$x_2 = 10$$

El conjunto de todas las soluciones factibles se denomina **región factible**. Tras representar la región factible, trataremos de hallar en ella la **solución óptima** (la mejor de entre las factibles).

[2]Abreviaremos *problema de programación lineal* como *p.p.l.*

Las restricciones $x_1 \geqslant 0$ y $x_2 \geqslant 0$ nos indican que nuestra región factible se halla en el primer cuadrante. Esto será así siempre que contemos con las restricciones de *no negatividad*, pero no conviene que olvidemos comprobarlo.

Dando un par de valores sencillos (los más cómodos son el de abscisa 0 y el de ordenada 0, cortes con los ejes X e Y respectivamente), representamos las rectas correspondientes al resto de restricciones:

$x_1 \leqslant 8$ y $x_2 \leqslant 10$
$5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \Rightarrow$ recta $5x_1 + 3x_2 = 45 \Leftrightarrow (0, 15)$ y $(9, 0)$

Una vez representados, probamos a sustituir en la desigualdad ó inecuación un punto (por regla general el origen) para conocer cuál de los dos semiplanos en que dicha recta divide el espacio cartesiano es el que cumple la restricción concreta.

Llegados a este punto, tendremos una región que encierra todos los puntos que verifican nuestras restricciones; ahora nos queda minimizar $z = 40x_1+36x_2$ (en este caso; en otro podríamos requerir una maximización), que no representa sino un haz de rectas paralelas. Quizás se vea más claro si se escribe la ecuación en forma *punto-pendiente*: $x_2 = -\dfrac{40}{36} + \dfrac{z}{36}$.

Lo que debemos encontrar es, concretamente, la *recta del haz* que, *cortando a la región factible*, tiene *menor valor de z*. Las rectas del haz también se denominan **rectas de nivel**.

Para elegir entre posibles puntos candidatos podemos:

a) Calcular las coordenadas de los puntos, sustituir en la *función del objetivo* y comprobar cuál da menor valor (ó mayor en su caso) al sustituir en z.

b) Comparar las pendientes de las rectas en valor absoluto y elegir en base a dicha comparación.

En este caso, $\left|-\dfrac{40}{36}\right| < \left|-\dfrac{5}{3}\right|$. De modo que la *solución óptima*, que además en este caso es *única* resulta:

$$\begin{aligned} x_1^{\text{OPT}} &= 8 \\ x_2^{\text{OPT}} &= \frac{5}{3} \\ z^{\text{OPT}} &= 380 \end{aligned}$$

Una **proposición** que podría ser demostrada, aunque nosotros no lo haremos, afirma que *si hay puntos óptimos*, si existe solución óptima, entonces al menos uno de los vértices de la región factible será siempre una solución óptima, es decir, los puntos óptimos *están en los vértices de la región.* O, lo que es lo mismo, si existen puntos óptimos, al menos uno está en un vértice.

Además también se cumple que si se tienen *dos óptimos*, cualquier punto perteneciente al *segmento que los une* es *también solución óptima.*

Un problema puede ser:

$$\left\{\begin{array}{lllll} & & & & \text{SOL. ÚNICA}\\ & & & \nearrow & \\ & & \text{CON ÓPTIMOS} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{FACTIBLE} & & & & \text{SOL. MÚLTIPLES INFINITAS}\\ & \searrow & & & \\ & & \text{NO ACOTADO} & & \\ & & & & \\ \text{NO FACTIBLE} & & & & \end{array}\right.$$

No debe confundirse un *problema no acotado* con una *región no acotada.* Un *problema no acotado* $\Rightarrow$ una *región no acotada*, pero una *región no acotada* $\not\Rightarrow$ que el *problema* sea *no acotado.*

Veremos cómo resolver un p.p.l. con cualquier número de restricciones y variables.

1.3. P.P.L. en forma estándar

Un p.p.l. con m restricciones y n variables se dice que está en forma estándar cuando es de la forma:

$$\text{Máx/Mín} \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{sujeto a} \quad \left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

$$x_i \geqslant 0 \quad b_j \geqslant 0 \qquad \forall i, \quad \forall j$$

Es decir:

- todas las restricciones han de ser de igualdad, han de ser ecuaciones
- todas las x_i están sujetas a no negatividad
- los términos independientes también han de ser mayores ó iguales que cero

En notación matricial:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Máx/Mín} & z & = & cx \\ \text{sujeto a} & Ax & = & b \\ & x & \geqslant & 0 \\ & b & \geqslant & 0 \end{array}$$

Con $c = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ (vector de costes ó beneficios)
y

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta forma de escribir los p.p.l. se introduce porque el principal método que veremos para resolverlos, el *Simplex*, sólo sirve para resolver los p.p.l. en esta forma.

Lo que haremos será construir sistemas similares mediante pequeñas modificaciones para transformar un problema dado a forma estándar y a continuación, resolverlo.

· **Para deshacer desigualdades**: se suma ó resta (según sea una desigualdad *menor ó igual* ó *mayor ó igual*) una **variable de holgura** x_{n+1}. Estas variables serán siempre mayores ó iguales que cero, por lo que cumplirán siempre la restricción de no negatividad.

· **Para eliminar variables con valores negativos**, $x_i \leqslant 0$: se lleva cabo un **cambio de variable** de la forma $y_i = -x_i$. En consecuencia $y_i \geqslant 0$ y se salvan las restricciones.

· **Para concretar variables que puedan tener cualquier valor** (y, en consecuencia, cualquier signo): puesto que cualquier número real se puede escribir como diferencia de dos números positivos, se hace la **sustitución** $y_i - y_{i+1} = x_i$;, $y_i, y_{i+1} \geqslant 0$.

· **Para solucionar términos independientes negativos**, $b_i < 0$: simplemente multiplicamos toda la ecuación por -1, ya que la solución no variará.

Puesto que ya conocemos la forma de pasar de un p.p.l. en forma no estándar a un p.p.l. equivalente en forma estándar, a partir de ahora consideraremos que todo p.p.l. está dado en forma estándar.

1.4. Definiciones básicas

Sea el p.p.l. en forma estándar:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Máx/Mín} & z & = & cx \\ \text{sujeto a} & Ax & = & b \\ & x & \geqslant & 0 \end{array}$$

Se llama **solución factible** x^0 a un vector x que cumple las restricciones:

$$\begin{array}{rcl} Ax^0 & = & b \\ x^0 & \geqslant & 0 \end{array}$$

Se llama **región factible** al conjunto de todas las soluciones factibles:

$$\mathcal{R} = \left\{ x^0 \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \begin{array}{rcl} Ax^0 & = & b \\ x^0 & \geqslant & 0 \end{array} \right\}$$

Si la **región factible** es el **vacío**, $\mathcal{R} = \varnothing$, el **problema** se dice **no factible**.

Se llama **solución óptima** x^{OPT} a la mejor de las soluciones factibles:

$$x^{\text{OPT}} \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \begin{array}{rcl} cx^{\text{OPT}} & \geqslant & cx^0, \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ (maximizando)} \\ cx^{\text{OPT}} & \leqslant & cx^0, \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ (minimizando)} \end{array}$$

Se llama **valor óptimo** de la función del objetivo a:

$$z^{\text{OPT}} = cx^{\text{OPT}}$$

En la mayoría de los p.p.l. con los que nos encontraremos, veremos que el sistema $Ax = b$ es compatible indeterminado y que tiene, por tanto, infinitas soluciones. Más adelante veremos un resultado que nos muestra cómo los “vértices”, en los que sabemos que están los óptimos, se corresponden con una forma particular de las soluciones.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Método de Gauss-Jordan

El método del *Simplex*, que veremos, se basa en hacer una serie de operaciones sencillas sobre el sistema, al estilo del ya por nosotros conocido **método de Gauss-Jordan**.

Sabemos que dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Recordemos en este punto de qué operaciones sencillas se valía este método, operaciones que además nos garantizaban la equivalencia de los sistemas de partida y obtenido:

& Multiplicación de una de las ecuaciones del sistema por una constante.

& Sustitución de una de las ecuaciones del sistema por otra, resultante de la combinación lineal de ella y las restantes.

Un sistema de ecuaciones se dice que está en **forma canónica** si tiene una *variable básica* por ecuación.

Una **variable básica** es una variable que tiene como coeficientes 1 en una de las ecuaciones del sistema y 0 en las restantes.

Llamaremos **pivotaje** a la sucesión de operaciones que hay que realizar para pasar de un sistema dado a otro equivalente que esté en forma canónica.

Se llama **solución básica** a aquella que se obtiene en un sistema canónico dando el valor 0 a las variables no básicas y resolviendo para las básicas.

Se llama **solución factible básica**[3] a una solución básica (factible) en la cual las variables básicas son mayores ó iguales que cero.

El conjunto de las soluciones factibles básicas es un subconjunto de las soluciones básicas. Una solución básica no tiene por qué ser factible básica.

Para un sistema dado, hay $\binom{n}{m}$ (con n número de variables del sistema y m número de ecuaciones) soluciones básicas, algunas de las cuales serán factibles básicas y otras no. O, lo que es lo mismo, en general, con m restricciones y n variables[4], tendremos como mucho $\binom{n}{m}$ soluciones factibles básicas.

Se puede demostrar que cada s.f.b. se corresponde con un vértice de la región factible (si lo vemos como un p.p.l.), de modo que es entre éstas entre las que hay que buscar las soluciones óptimas. El método del *Simplex* se basa en buscar las s.f.b., pero en lugar de calcularlas todas, buscaremos una, pasaremos a otra mejor y así sucesivamente hasta llegar a la óptima, en menos pasos.

[3]Lo abreviaremos s.f.b.

[4]Suponemos siempre $n \geqslant m$; si $n = m$, hay una única s.f.b. y además es la óptima y si $s < m$, no hay solución.

Capítulo 2

El método del Simplex

2.1. Esquema básico de funcionamiento del método del Simplex

Es éste un método de resolución de p.p.l. que fue diseñado por G.B. Dantzing.

Hemos de partir de un p.p.l. en forma estándar. Tengamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \\ & \\ \text{sujeto a} & \left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 7 \\ x_i \geqslant 0 \quad \forall i \end{array}\right\} \end{array}$$

que ya está en forma estándar y con sus restricciones en forma canónica. Obtenemos la siguiente s.f.b.:

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 = 0 \quad \text{(variables no básicas)} \\ \\ \left.\begin{array}{l} x_4 = 8 \\ x_5 = 7 \end{array}\right\} \text{(variables básicas -base-)} \end{array}\right] \Rightarrow z = -1$$

¿Cómo saber si esta s.f.b. es óptima o no? Podríamos saber que no lo es si encontráramos otra mejor. Para pasar a otra s.f.b. lo que se hace es forzar a ser básica a alguna de las variables no básicas y no básica a alguna de las básicas. Esto se consigue sumando una unidad a alguna de las variables no básicas y resolviendo de nuevo para las básicas. Gráficamente, esto significa probar con un vértice adyacente.

Hagamos:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1, \quad x_2, x_3 = 0 \\ x_4 = 7, \quad x_5 = 4 \\ \\ x_1 + x_4 \qquad = 8 \\ 3x_1 \qquad + x_5 = 7 \end{array}\right] \Rightarrow z = 2$$

Hemos calculado una nueva s.f. (aunque no es básica, no es un vértice). El nuevo valor de z, $z = 2$, nos indica que la s.f.b. de antes no era óptima, puesto que tratamos de maximizar y hemos obtenido un valor mayor. Sin embargo, puesto que ésta no es un vértice, ésta tampoco es óptima.

Calculamos el **beneficio relativo** de la variable no básica que hemos convertido en básica (en este caso x_1): $\bar{c}_1 = 2 - (-1) = 3$.

► Llamamos **beneficio relativo de la variable** x_i al cambio neto que se produce en la función del objetivo z cuando la variable no básica i se aumenta en una unidad manteniendo las demás variables no básicas a cero.

En este caso, hemos visto que por cada unidad que se aumente x_1, z va a aumentar 3 (ya que la relación es *lineal*). Debemos, pues, intentar aumentarla lo más posible, pero no podemos hacerlo ilimitadamente, tenemos que respetar:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 + x_4 & & = 8 \\ 3x_1 & + x_5 & = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \min\left\{8, \frac{7}{3}\right\} = \frac{7}{3}$$

Esta regla que por lógica acabamos de emplear se denomina **regla de la mínima proporción**, y se calcula hallando los cocientes entre las constantes y los coeficientes de la variable que va a entrar en la base (aquélla de la que calculamos el beneficio relativo, la no básica que hacemos básica añadiéndole una unidad), pero teniendo en cuenta *sólo los positivos*. Si todos los coeficientes resultasen negativos, nos encontraríamos ante un **problema no acotado**.

Resolviendo de nuevo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7}{3}, \quad x_2, x_3 = 0 \\[2ex] x_4 = \dfrac{17}{3} \\[2ex] x_5 = 0 \end{array}\right\}$$

Que es de nuevo una s.f.b., si bien relativa a otro sistema canónico distinto del que partimos:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + x_4 - \frac{1}{3}x_5 & = & \dfrac{17}{3} \\[2ex] x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \qquad + \frac{1}{3}x_5 & = & \dfrac{7}{3} \end{array}\right\}$$

Al calcular el nuevo valor de z, veremos que, como indicaba el beneficio relativo, es el triple del inicial, $z = 6$.

Si el beneficio relativo de x_1 hubiera sido negativo, hubiésemos probado con los de las otras variables no básicas. Si todos los beneficios relativos resultasen menores ó iguales que cero (en caso de maximización, mayores/iguales que cero si estuviésemos minimizando), sabríamos que tenemos ya la s.f.b. óptima.

Se podrían calcular todos los beneficios relativos y quedarnos con el mayor, aunque esto no es garantía, porque puede variar el margen que tenemos para aumentar la variable, pero de todos modos es el criterio que seguiremos.

2.2. El método del Simplex por tablas

Consiste en la tabulación de los pasos y datos anteriores, a fin de mecanizar el proceso de cálculo de la solución óptima del p.p.l.

Del ejemplo anterior obtendríamos:

c_B	c_j	5	2	3	-1	1	
-1		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ctes.
-1	x_4	1	2	2	1	0	8
1	x_5	3	4	1	0	1	7
	$\bar{c}_j$	3	0	4	0	0	$z = -1$

La primera columna son los **costes** de las variables básicas. La primera fila representa los coeficientes en z de todas las variables, y las siguientes filas, los coeficientes en las ecuaciones del sistema. La última fila son los beneficios relativos de todas y cada una de las variables. La última columna, los términos independientes de las mismas. En la esquina inferior derecha, colocamos el valor de la función objetivo.

De la tabla se saca inmediatamente:

$$x_4 = 8, \quad x_3 = 7$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

La *fórmula* que encarna el cálculo de los *beneficios relativos* (la que usamos para "rellenar" la última fila), sin tener que recurrir al cálculo completo como veíamos en el apartado anterior (página 13), es la siguiente:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B P_j$$

donde P_j es la columna asociada a cada variable. Entra en la base aquella variable no básica que tenga mayor valor de $\bar{c}_j$.

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B P_j = 5 - (-1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\bar{c}_2 = 2 - (-1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 - (2) = 0$$

$$\bar{c}_3 = 3 - (-1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - (-2+1) = 4$$

Hallamos $\min\left\{\frac{8}{2}, \frac{7}{1}\right\} = 4$, calculamos:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0$$
$$x_3 = 4$$
$$x_5 = 3$$

Y a continuación se amplía la tabla:

c_B	c_j	5	2	3	-1	1	
-1		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ctes.
-1	x_4	1	2	2	1	0	8
1	x_5	3	4	1	0	1	7
	$\bar{c}_j$	3	0	4	0	0	$z = -1$
3	x_3	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	4
1	x_5	$\frac{5}{2}$	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	3
	$\bar{c}_j$						$z = 15$

El proceso continúa hasta que la última fila, la de los $\bar{c}_j$, contenga sólo valores menores ó iguales que cero (en este caso, que se busca la maximización; si se pretendiese minimizar la función objetivo, sería a la inversa).

En resumen, supuesto un p.p.l. cuyo sistema se encuentre en forma estándar y cada una de las restricciones en forma canónica:

(I) Calculamos una s.f.b. (dando el valor cero a las variables no básicas y resolviendo para las demás).

(II) (Después de trasladar los datos a la tabla) se calculan los beneficios relativos y se comprueba si la solución es óptima (viendo si hay beneficios relativos $\geqslant 0$ en caso de maximización o $\leqslant 0$ en caso de minimización).

(III) Se escoge la variable que va a entrar en la base, según el criterio de los beneficios relativos, y la que sale, de acuerdo con la regla de la mínima proporción (para la cual sólo se tienen en cuenta los *coeficientes positivos*)[1].

(IV) Pivotaje.

(V) Obtención de una nueva s.f.b. y cálculo de beneficios relativos... <Repetir hasta que el criterio de benificios relativos nos indique que ya hemos dado con la solución óptima>.

Sabemos que los beneficios relativos de las variables básicas son cero; puede ocurrir que alguno de los *beneficios relativos de las variables no básicas* sea también *cero*. En ese caso, la s.f.b. que tengamos puede ser óptima y no poder mejorarse, pero sí ser "**empatada**". Para que un problema se considere resuelto hay que calcular todas las soluciones óptimas, si es que hay más de una[2].

[1]Ya estemos maximizando ó minimizando, siempre se escoge el de menor proporción.

[2]El Simplex nos dirá que hay dos, pero veremos que si hay más de una puede demostrarse que en realidad hay infinitas <ver ejercicio 14 del tema>.

El Simplex minimizando

Siempre se puede pasar un problema de minimización a uno de maximización simplemente con definir otra función que resulte de cambiarle el signo a la original. Con las mismas restricciones, se resuelve y los valores hallados son los buscados. De todos modos, no lo hacemos así, sino que utilizamos el método del Simplex por tablas pero buscando que los beneficios relativos sean, como ya hemos comentado, todos mayores ó iguales que cero, de modo que la variable que entra en la base es la de $\bar{c}_j$ más negativo (**criterio de optimalidad opuesto**), y la que sale se elige del mismo modo que antes, por la mínima proporción[3].

Como ya ha sido comentado, si todos los beneficios relativos son *estrictamente mayores que cero* (los de las variables no básicas), la *solución óptima es única*; si alguno es *mayor o igual*, habrá múltiples.

Si todos los coeficientes de una variable que resulta seleccionada para entrar en la base son negativos, no se puede aplicar la regla de la mínima proporción, ¿qué es lo que esto nos indica? Pues que la **solución** (y por lo tanto, el *problema*) es **no acotada**.

Éste es el modo de detectarlo en el Simplex, cuando se nos presenta una columna completa de coeficientes negativos, y basta con que nos encontremos una columna de estas características con un $\bar{c}_j$ positivo si buscamos maximizar (negativo si minimizamos) para detener el proceso del Simplex, independientemente de que sea la columna de la variable candidata a entrar en la base o no.

Nos encontraremos con un **problema no factible** si en el sistema hay alguna constante (coeficiente) negativa.

2.3. Problemas de cálculo

2.3.1. Empates en el criterio de entrada

Puede ocurrir que el cálculo de los beneficios relativos nos presente un empate entre dos variables, pero el problema en este caso se reduce sólo a escoger una de ellas.

2.3.2. Empates en el criterio de salida

Si al aplicar la regla de la mínima proporción se produce un empate entre dos variables candidatas a dejar la base, se escoge también a libre criterio una de ellas, aunque con salvedades, como puede ser por ejemplo la ***degeneración*** del sistema.

2.3.3. Degeneración

Si se tiene alguna **variable degenerada**, será siempre ésta la que salga de la base.

Una s.f.b. con alguna *variable básica* igual a cero[4] se denomina **s.f.b. degenerada**. La existencia de variables degeneradas puede llevar a más pasos en el algoritmo, sin avances

[3] En maximización se busca que todos los beneficios relativos sean menores ó iguales que cero y entra en la base la variable con aquél $\bar{c}_j$ más positivo.

[4] El coeficiente b es nulo.

(sin que varíe el valor de z^5), pero no indica que el problema no tenga solución.

2.3.4. Ciclaje

Debemos distinguir claramente esta situación de la anterior. El fenómeno del **ciclaje** es raro, y detectamos que se produce cuando, tras partir de una s.f.b. no óptima y después de sucesivas iteraciones del algoritmo del Simplex, obtenemos las mismas tablas una y otra vez.

Ha de quedar claro que *degeneración* $\not\Rightarrow$ *ciclaje*, y que existen criterios de entrada y salida en la base más refinados que evitan este problema.

2.4. Obtención de una s.f.b. inicial

Para encontrar una s.f.b. inicial, para llegar a una primera tabla a partir de la que arrancar el método del Simplex, podemos usar el poco eficiente y tedioso método de "ensayo y error", o bien podemos optar por el uso de **variables artificiales**.

Tras convertir el problema a un sistema de ecuaciones equivalente en forma estándar y pasarlo a forma canónica, podemos probar combinaciones de variables para encontrar una s.f.b. La otra alternativa nos habla de añadir un nuevo tipo de variables al sistema.

¿Cómo se hace con las *variables artificiales?*

Simplemente, se coloca una nueva variable en cada ecuación que no posea una *variable básica*. Se obtiene un nuevo sistema, *no equivalente al inicial*, que denominamos **sistema artificial**.

Puesto que no son equivalentes, sus soluciones no son las que buscamos, pero se puede demostrar que si somos capaces de encontrar una s.f.b. del sistema artificial donde las variables artificiales sean cero (estén fuera de la base) será también una s.f.b. del sistema de partida, desde la que podremos empezar a iterar el Simplex.

¿Y cómo "echamos" a las variables artificiales de la base? Veremos a continuación dos métodos.

2.4.1. Método de la M ó de las Penalizaciones

Se toma el sistema artificial y como función del objetivo se define a partir de la original $w = z + \mathrm{M}(\sum x_j) \quad \diagdown \quad x_j$ es variable artificial, donde M es un número muy grande. El término $\mathrm{M}(\sum x_j)$ es la *penalización* de las variables artificiales. Puesto que M tiene un valor tan elevado, aplicando naturalmente el método del Simplex, ya se "encarga" de echarlas de la base.

¿Y si no fuésemos capaces? ¿Qué ocurre si llegamos al óptimo del sistema sin conseguir que las variables artificiales dejen de ser positivas? Ello significaría que el **problema original** era **no factible**, algo que se demuestra por reducción al absurdo: ¡si fuese factible, la s.f.b. óptima solución del original lo sería del artificial con las $x_{\text{artificiales}}$ anuladas!

La primera tabla del sistema artificial que no tenga ninguna variable artificial en la base es aquélla de la que partimos para la resolución del problema original (simplemente

[5] Antes incluso de calcular los beneficios relativos ya sabemos si la s.f.b. que obtendremos será óptima, si el valor de z ha cambiado o no.

se prescinde de las columnas de las $x_{\text{artificiales}}$, se rellenan con los valores correctos los valores de la fila y columnas cabecera, y se arranca el algoritmo).

2.4.2. Método de las dos fases

Este otro método consiste en seguir dos pasos:

1ª fase) Tomar el sistema artificial y plantear el problema Min $w = \sum x_{\text{artificiales}}$ con las mismas restricciones, sea cual sea el problema original. Puede ocurrir que la mejor w sea *mayor que cero*, indicándonos que alguna de las variables artificiales es positiva y por tanto el **problema original no factible**. O bien que w sea *igual a cero*, y entonces puede pasarse a…

2ª fase) Se aprovecha la tabla final de la resolución del problema anterior para empezar a resolver el problema original.

¿Qué ocurriría si llegamos a w^{OPT} con $w^{\text{OPT}} = 0$ pero alguna variable artificial está en la base porque la solución es degenerada? Lo que se haría sería tomar igualmente la tabla como inicial para el problema original e intentar sacar a la susodicha variable artificial degenerada cuanto antes de la base (ya en la segunda fase, como decimos). La echaríamos en cuanto el mínimo fuese cero, independientemente en este caso de que su coeficiente (el de la variable artificial degenerada de la base) fuese positivo o negativo.

2.5. Aspectos computacionales del Simplex

En su aspecto más general, supuesto un problema en forma estándar con sus restricciones en forma canónica, de suerte que tengamos un sistema de n variables con m incógnitas (restricciones), y colocando las m variables básicas en primer lugar, por comodidad y sin pérdida de generalidad, tendríamos:

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc|c}
 & x_1 & \dots & x_r & \dots & x_m & & x_{m+1} & \dots & x_s & \dots & x_n & & \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,s} & \dots & a_{1,n} & & b_1 \\
\vdots & 0 & 1 & & \dots & \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
x_r & \vdots & & 1 & & \vdots & & a_{r,m+1} & \dots & a_{r,s} & \dots & a_{r,n} & & b_r \\
\vdots & \vdots & \dots & & \ddots & 0 & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
x_m & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,s} & \dots & a_{m,n} & & b_m \\
\hline
 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & & \bar{c}_{m+1} & \dots & \bar{c}_s & \dots & \bar{c}_n & &
\end{array}
$$

Los pasos a programar son los ya conocidos:

1. Comprobar que todos los beneficios relativos son menores/iguales que cero (en caso de maximización) o mayores/iguales que cero (en caso de minimización). Si no se da el caso, se sale y se da la solución.

2. Se busca el beneficio relativo más positivo, que es el que entrará en la base:

$$\bar{c_s} = max_{\bar{c_j}>0}\{\bar{c_j}\}$$

3. Por la regla de la mínima proporción, sale x_r donde:

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = min_{a_{i,s}>0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,s}} \right\}$$

Se recalculan:

$$a_{r,j} = \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \qquad b_r = \frac{b_r}{a_{r,s}} \qquad j = 1 \ldots n$$

Y se actualiza la tabla, donde un elemento cualquiera resulta:

$$a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,s}\frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \ldots m \quad i \neq r \\ j = 1 \ldots n \end{array}$$

$$b_i = b_i - a_{i,s}\frac{b_r}{a_{r,s}} \qquad i = 1 \ldots m \quad i \neq r$$

A partir de esta nueva tabla, se repite iterativamente.

Mejoras al Simplex programado

- En lugar de calcular todos los $\bar{c}_s$ y escoger el máximo, en cuanto se encuentra un beneficio positivo durante la inspección, se mete en la base la variable correspondiente.
- Otra optimización es el ***Simplex revisado***, que veremos, y cuyo mecanismo consiste en no calcular toda la tabla si no sólo lo imprescindible de ésta (dos columnas, en realidad).

El *número de iteraciones* necesarias para n variables y m restricciones varía entre m y $3m$. En la práctica, una cota superior para el número de iteraciones es $2(m + n)$. El tiempo de computación varía aproximadamente en relación con m^3.

Capítulo 3

Problemas especiales de programación lineal

3.1. Problemas de Transporte

3.1.1. Formulación del Problema Standard del Transporte

Ya vimos en el tema anterior un problema que mencionamos con particularidad, y que conocíamos con el nombre de *problema del transporte*. Aunque, como señalamos en su momento, este problema se puede tratar como un problema de programación lineal, en este capítulo veremos métodos específicos para este tipo de problemas, con los que los abordaremos en la práctica.

Antes de continuar, recordemos cómo se describía el susodicho problema. Se tienen:

$$
\begin{array}{rl}
m & \text{almacenes} \\
n & \text{tiendas} \\
a_i & i = 1 \ldots m \text{ unidades de un producto en stock} \\
b_j & j = 1 \ldots n \text{ unidades de ese producto en demanda} \\
c_{ij} & \left.\begin{array}{c} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \end{array}\right\} \text{coste del transporte}
\end{array}
$$

Definimos las variables:

$$x_{ij} = \text{“unidades del producto transportadas de } i \text{ a } j\text{”, con } \begin{array}{l} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \end{array}$$

Unidades de producto que salen del almacén i-ésimo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \qquad i = 1 \ldots m$$

Unidades de producto que llegan a la tienda j-ésima:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \qquad j = 1 \ldots n$$

Tenemos, pues, $m + n$ restricciones no triviales, es decir, a parte de que:

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i, j \; \begin{array}{l} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \end{array}$$

La función del objetivo no es otra que:

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_j x_{ij}$$

Si $c_{ij} = +\infty$ (un número muy grande), significa que no hay transporte entre el almacén i y la tienda j (nos lo asegura).

Para que se *cumplan las restricciones anteriores*, no obstante, es *necesario* que además:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$$

es decir, que el stock total sea mayor o igual que la suma de todas las demandas.

Si se da la *igualdad*, las restricciones anteriores han de ser a su vez de igualdad. En este caso, el problema del transporte se denomina **problema del transporte en forma estándar**.

Los métodos que veremos sólo resuelven el problema del transporte si está en forma estándar. Veremos, pues, en primer lugar, cómo pasar de un problema de transporte genérico a un problema de transporte en forma estándar.

Primer caso: más stock que demanda

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

En este caso, creamos una **tienda ficticia** que solicite lo que "sobra" y cuyo coste de transporte hasta la misma sea nulo, es decir, cuya demanda sea:

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

y con coste cero. Matemáticamente, este es el proceso que nos permite añadir las *variables de holgura*; nos "inventamos" las variables:

$$\begin{array}{ll} x_{i,n+1} & i = 1 \dots m \\ c_{i,n+1} = 0 & i = 1 \dots m \end{array}$$

El problema nos queda:

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

con las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1 \dots n+1$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i, j$$

Segundo caso: más demanda que stock

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Se crea un **almacén ficticio** que contenga lo que falta con coste de transporte a las tiendas cero. Lo que se transportase de este almacén a cada una de las tiendas sería lo que queda sin cubrir de la demanda en realidad. El stock de este almacén sería, pues:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$
$$c_{m+1,j} = 0 \quad j = 1 \dots n$$

Puesto que ya sabemos transformar cualquier problema de transporte en un problema de transporte en *forma estándar*, a partir de ahora consideraremos siempre que partimos de un problema de transporte en forma estándar.

3.1.2. Obtención de un s.f.b. inicial: Métodos de la Esquina NO y del coste mínimo

Para empezar, aclararemos que, aunque parece lógico pensar que un problema de transporte con m almacenes y n tiendas tiene $m+n$ variables básicas, en realidad se tienen $m+n-1$, porque siempre va a haber una *restricción redundante*.
Simplemente hemos de ver que de estas $m+n$ ecuaciones, una es combinación lineal de las demás:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1 \dots m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1 \dots n$$

Sumemos todas las ecuaciones que responden a la primera expresión y todas las que responden a la segunda. Tendremos:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Los dos primeros términos obtenidos son claramente iguales, así pues, han de serlo los dos segundos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

algo que ya sabíamos que era cierto porque estamos en forma estándar. De modo que podemos despejar una de las ecuaciones y expresarla en función de las demás, es decir, podemos prescindir de una de ellas, quedándonos, pues, con $m+n-1$. Se tendrán, por tanto, $m+n-1$ variables positivas, nunca más.

En forma tabular, lo expresaremos mediante una tabla de doble entrada (matriz) que obtenemos directamente a partir del enunciado.

tiendas

		T_1	T_2	T_3	T_4		
	A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1	
almacenes	A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2	stock
	A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3	
		b_1	b_2	b_3	b_4		

demandas

Se rellenarán las x_{ij} de forma que sumando por filas se obtenga a_i y sumando por columnas se obtenga b_j, buscando además que quede lo más barato posible. Así obtenemos nuestra primera s.f.b.[1]

Método de la Esquina Noroeste

Dado un problema de transporte en forma estándar y tabulado a partir de su enunciado, este método consiste en tomar como variables básicas las que ocupan siempre la primera esquina noroeste que esté libre.

Por ejemplo, sean 3 almacenes y 4 tiendas, con $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, $b_1 = 4$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, $b_4 = 4$ y los siguientes costes:

	T_1	T_2	T_3	T_4	
A_1	2	2	2	1	3
A_2	10	8	5	4	7
A_3	7	6	6	8	5
	4	3	4	4	

	T_1	T_2	T_3	T_4	
A_1	**3**	0	0	0	3
A_2	**1**	**3**	3	0	7
A_3	0	0	1	4	5
	4	3	4	4	

Tenemos $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas,
y el valor de $z = 3\times2+10\times1\times3\times8+3\times5+1\times6+4\times8 = 6+10+24+15+6+32 = 93$.

Método del Coste Mínimo

En el método que acabamos de ver no se tiene en cuenta el coste, de suerte que podría salirnos una s.f.b muy alejada del óptimo, lo que nos llevaría a un mayor número de iteraciones y, consecuentemente, de cálculos.

En este caso, en lugar de elegir las variables de la esquina NO escogemos la de mínimo coste[2].

En el ejemplo de antes:

	T_1	T_2	T_3	T_4	
A_1	0	0	0	**3**	3
A_2	2	0	4	**1**	7
A_3	2	3	0	0	5
	4	3	4	4	

z=3+20+20+4+14+18=79

[1]En el fondo es el Simplex con otra notación.

[2]Este método es más difícil de programar, pero es más usado.

No es algo que esté garantizado, pero es lógico que las s.f.b. obtenidas de esta manera sean mejores que las anteriores. Ahora bien, ¿cómo vemos si esta s.f.b. es óptima o no? Esta cuestión nos lleva a la siguiente sección.

3.1.3. Algoritmo de Stepping-Stone

Una vez calculada la primera s.f.b., el siguiente paso que dábamos en el Simplex[3] era calcular los beneficios relativos.

Si intentamos calcular $\bar{c}_{11}$, es decir, la diferencia en el valor de z si x_{11} aumenta una unidad, haremos:

	T_1	T_2	T_3	T_4	
A_1	2	2	2	1	3
A_2	10	8	5	4	7
A_3	7	6	6	8	5
	4	3	4	4	

0	0	0	3	3
2	0	4	1	7
2	3	0	0	5
4	3	4	4	

De forma que nos queda $\bar{c}_{11} = c_{11}(\text{cambio } x_{11}) + c_{14}(\text{cambio } x_{14}) + c_{21}(\text{cambio } x_{21}) + c_{24}(\text{cambio } x_{24}) = 2(1) + 1(-1) + 10(-1) + 4(1) = -5$.

Esto se condensa de manera más formal en el llamado **método u-v** ó **método MODI**, usado, como indicamos, para *calcular los beneficios relativos*. Se trata de calcular unos números u para cada almacén y unos números v para cada tienda, de suerte que

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

en las variables básicas.

Una vez calculados, los beneficios relativos de las variables no básicas se calculan:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

En el ejemplo anterior:

	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	0	0	0	3	3
u_2	2	0	4	1	7
u_3	2	3	0	0	5
	4	3	4	4	

$u_1 + v_4 = c_{14} = 1$ (datos de la tabla original)
$u_2 + v_1 = 10$
$u_2 + v_3 = 5$
$u_2 + v_4 = 4$
$u_3 + v_1 = 7$
$u_3 + v_2 = 6$

El sistema construido con las u y las v tendrá siempre $m + n$ incógnitas y $m + n - 1$ variables básicas, como sabemos, de modo que va a haber siempre infinitas soluciones. Puesto que a nosotros sólo nos interesa una de ellas, le daremos un valor a una de las variables y resolveremos para las demás.

Por ejemplo, suponemos que $u_1 = 0$ y así:

[3] Recordar el paralelismo entre ambos métodos.

	$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 2$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	0	0	0	3	3
$u_2 = 3$	2	0	4	1	7
$u_3 = 0$	2	3	0	0	5
	4	3	4	4	

Y podemos ahora calcular:

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 2 - (0 + 7) = -5$$

Calculados todos los beneficios relativos, si encontramos alguno menor o igual que cero, recordando que estamos minimizando[4], sabremos que la s.f.b. no es óptima aún. Escogeremos la variable que entra, aumentándola lo máximo posible, y la que sale en su lugar (aquélla que marca el máximo aumento por tener *mínimo* valor), volviendo a calcular beneficios relativos, etc, etc.

Volviendo a nuestro ejemplo:

	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	2	0	0	1	3
u_2	0	0	4	3	7
u_3	2	3	0	0	5
	4	3	4	4	

Es la nueva solución factible básica (donde seguimos teniendo seis variables no básicas, ceros, de modo que nuestra solución no es degenerada). Resolvemos el sistema de u's y v's y calculamos beneficios relativos:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 2 \\ u_1 + v_4 &= 1 \\ u_2 + v_3 &= 5 \\ u_2 + v_4 &= 4 \\ u_3 + v_1 &= 7 \\ u_3 + v_2 &= 6 \end{aligned}$$

	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	2	0	0	1	3
$u_2 = 3$	0	0	4	3	7
$u_3 = 5$	2	3	0	0	5
	4	3	4	4	

Aún no es s.f.b. óptima, entra x_{33} con $\alpha = 1$ y:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$	
$u_1 = 0$	3	0	0	0	3
$u_2 = 4$	0	0	3	4	7
$u_3 = 5$	1	3	1	0	5
	4	3	4	4	

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 2 \\ u_2 + v_3 &= 5 \\ u_2 + v_4 &= 4 \\ u_3 + v_1 &= 7 \\ u_3 + v_2 &= 6 \\ u_3 + v_3 &= 6 \end{aligned}$$

Que sí es ahora *óptima* y *única*. Si hubiese algún $\bar{c}_{ij} = 0$ entonces no sería única, sino que habría infinitos óptimos.

[4] El problema de transporte también puede, no obstante, plantearse de modo que haya que maximizar ganancias, por ejemplo.

Comentarios

Cuando calculamos una solución factible básica utilizando uno de los dos métodos indicados en la sección 3.1.2 puede ocurrirnos que obtengamos una solución *degenerada*, pero siempre podemos probar el otro. El problema en este caso es que no tenemos forma de saber cuál de las variables que toma el valor nulo (cero) es básica. Puede que elijamos una que no es, de suerte que al intentar formar un ciclo en el transcurso del algoritmo de optimización Stepping-Stone no seamos capaces, debiendo entonces retroceder para cambiar nuestra elección e intentarlo de nuevo. Por eso, esto puede conducirnos a un mayor número de cálculos, pero no quiere decir que no haya solución.

Propiedad

Si aumentamos k unidades todos los elementos de una fila/columna, las soluciones x_{ij} no varían.

Lo demostraremos para el caso del aumento en una unidad de toda una columna:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad c'_{ij}\begin{cases} c_{i1}+k & i=1\dots m \\ c_{ij} & \begin{array}{l} i=1\dots m \\ j\neq 1 \end{array} \end{cases}$$

Sustituyendo. . .

$$z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} c'_{i1}x_{i1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(c_{i1}+k)x_{i1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + k\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = z + kb_i = z + \text{cte}$$

Y los valores que minimizan z y z' son los mismos, es decir, el óptimo no varía, sólo su cuantía.

Esta propiedad es base para los métodos de asignación, que veremos a continuación.

3.2. Problemas de Asignación

3.2.1. Formulación del Problema Estándar de Asignación

El **problema estándar de asignación** se enuncia de la siguiente manera:

> Se tienen n trabajos $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \dots \mathrm{T}_n$ y n máquinas $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots \mathrm{M}_n$. El coste de que el trabajo j sea realizado por la máquina i se representará por c_{ij}, con $\begin{array}{l} i=1\dots n \\ j=1\dots n \end{array}$.

La peculiaridad es que cada trabajo ha de ser realizado por una única máquina, y cada máquina ha de realizar un solo trabajo. El elegir qué máquina realiza cada uno de los trabajos de modo que el coste total sea mínimo es nuestro objetivo.

Para que un *problema de asignación* se diga *en forma estándar* ha de cumplirse:

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de trabajos} = \text{n}^{\text{o}} \text{ de máquinas}$$

que son el tipo de casos que resolveremos.

En otro caso, el problema se halla en forma no estándar, pero se estandariza sencillamente:

- ◇ Si máquinas $>$ trabajos $\longrightarrow$ añadimos trabajos ficticios con costes cero (tantos como la diferencia entre máquinas y trabajos).
- ◇ Si máquinas $<$ trabajos $\longrightarrow$ añadimos máquinas ficticias con costes cero[5] (idem anterior).

Plantearemos el problema como un p.p.l.:

1. Definimos $n \times n$ variables $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la máquina M}_i \text{ hace el trabajo T}_j \\ 0 & \text{si no lo hace} \end{cases}$, con $i, j = 1 \ldots n$.
2. Las restricciones son:
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad &\cong \quad \text{número de trabajos que realiza la máquina } i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad &\cong \quad \text{máquinas que realizan el trabajo } j \end{aligned}$$
3. La función del objetivo es:
$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
que, como se puede observar, coincide con la del caso del transporte si hacemos los a_i y los b_i iguales a 1 (n almacenes con stock 1 y n tiendas con demanda 1).

Es decir, tendremos la tabla:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & T_1 & T_2 & \ldots & T_n & \\ \hline M_1 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & 1 \\ M_2 & c_{21} & \ddots & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & 1 \\ M_n & c_{n1} & \ldots & c_{nn-1} & c_{nn} & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

aunque los unos ya no los pondremos[6].

Podría resolverse mediante el Simplex, por ser p.p.l., o con el algoritmo de Stepping-Stone, por ser problema de transporte[7], pero veremos un nuevo métod más adecuado a continuación.

[5]Los costes han de ser nulos para que no cambie la función del objetivo.

[6]Si por algún motivo no queremos que una máquina i haga un trabajo j, haremos $c_{ij} = \text{M}$, con M un número muy grande.

[7]Aunque esto iba a plantear un problema, ya que las soluciones iban a ser degeneradas.

3.2.2. Método Húngaro

Recibe este nombre porque fue diseñado por el matemático húngaro Koning.

Puesto que hemos visto que es un caso del problema del transporte, para un problema de asignación podemos contar con que se verifican todas las propiedades que se daban para los problemas de transporte, como por ejemplo la vista en la sección 3.1.3 (página 27), que es base para lo que veremos a continuación.

Partiendo de que estamos *minimizando* la función del objetivo[8] y de que $c_{ij} \geqslant 0$[9]:

PASOS

1. Se escoge el mínimo de los coeficientes de cada fila/columna y se le resta a todos los elementos de su fila/columna. Se hacen ceros (se busca tener uno en cada fila y columna), y si con la tabla resultante podemos hacer las asignaciones, se acaba el problema (el óptimo serán los nulos, claro está); si no, seguimos.
2. Se escoge el mínimo de los coeficientes de cada columna/fila que haya quedado sin ceros, y se procede de igual forma que antes. De nuevo, si conseguimos asignar con costes nulos ahora, hemos terminado; sino, continuamos.
3. Se trazan líneas horizontales y verticales cubriendo filas y columnas de modo que todas las celdas con coste cero queden cubiertas. Se trata de encontrar el menor número de líneas que cubran todos los ceros.
   El **teorema de Koning** nos asegura que el número mínimo de líneas para cubrirlos coincide con el número máximo de trabajos que se pueden asignar con coste nulo, usando celdas cero.
4. Se busca el mínimo entre los elementos que no quedan cubiertos por líneas y se le resta a esos mismos elementos (no cubiertos) y se les suma a los que están cubiertos por la intersección de dos líneas[10]. De esta manera debemos llegar a una tabla en que se puedan asignar los costes mínimos.

Existe un método para cubrir todos los ceros con el menor número de líneas (paso 3), y viene descrito por el siguiente algoritmo:

1. Se recuadra un cero por cada fila y columna, tantos como sea posible, tachándose los restantes.
2. Se marcan las filas que no tengan ningún cero recuadrado.
3. Se marcan las columnas que tengan algún cero tachado en fila marcada.
4. Se marcan las filas que tengan algún cero recuadrado en alguna columna marcada.

[8] Si no fuese así, simplemente le cambiamos de signo a todos los coeficientes de la tabla y el mínimo para ese nuevo problema será el máximo para el nuestro original. Esto puede hacerse merced a la propiedad mencionada líneas arriba.

[9] Si no fuese así, escogemos el mínimo de la fila/columna en que se encuentre el coeficiente en cuestión y se lo sumamos a todos los coeficientes de la fila/columna.

[10] La interpretación de esto es la suma de la constante a las filas/columnas y su resta a las columnas/filas, de modo que en todo el proceso no estamos variando el óptimo.

5. Se repiten los dos pasos anteriores hasta que no haya nada que marcar.
6. Se trazan las líneas sobre las filas no marcadas y sobre las columnas marcadas.

Capítulo 4

El método revisado del Simplex

4.1. El método revisado: Conceptos básicos. Vector de Multiplicadores

En este tema vamos a ver una modificación del método del Simplex, conocido como **Método del Simplex Revisado** o **Método del Simplex con Multiplicadores**.

Básicamente es una mejora en *tiempo*, ya que suprimiendo algunos pasos innecesarios hace que sea más rápido.

En el método del Simplex trabajábamos siempre con tablas completas, pero es fácil darnos cuenta de que no todos los datos que aparecen en ellas tienen la misma importancia:

- $\bar{c}_i$ es necesario para saber si una s.f.b. es óptima o no
- una vez que se conoce la variable que "entra", se necesita conocer su columna, para calcular cuál "sale"
- también hemos de saber los valores de las variables básicas actuales (columna de constantes de la derecha)

El método del *Simplex revisado* se basa en calcular lo que es realmente necesario. De todos modos, a pesar de las restricciones que se harán, en cualquier momento se puede obtener cualquier tabla completa mediante operaciones con matrices a partir de la tabla del enunciado.

4.1.1. Notación

- Se denotará por P_i la columna asocidada a la variable x_i de la tabla del enunciado.
- Se denotará por $\bar{P}_i$ la columna asociada a la variable x_i de cualquier otra tabla (sin importarnos cuál).
- Se denotará por b la columna de los términos independientes originales.
- Se denotará por $\bar{b}$ la columna de los términos independientes en cualquier otra tabla.
- Se denotará por B_i la **matriz básica** de la *i-ésima* tabla, siendo ésta la matriz cuadrada cuyas columnas son las asociadas en la tabla original (correspondiente al

enunciado) a las variables básicas en un momento determinado. La *primera matriz básica*, por estar en forma canónica el problema, es siempre la *identidad*.

Las modificaciones que introduciremos se basan en que cualquier columna de cualquier tabla puede obtenerse a partir de los datos originales mediante la fórmula:

$$\bar{P}_i = B^{-1} P_i$$

donde B^{-1} representa la inversa de la matriz básica B correspondiente a dicha tabla; también

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

4.2. Desarrollo del método

Dado un p.p.l. en forma estándar y canónica, podemos obtener la primera s.f.b. a partir del enunciado. La primera matriz básica será, como ya hemos dicho, la identidad.

Calculamos los beneficios relativos de las variables no básicas, y analizamos si la solución es óptima o no y en caso de que no lo sea, qué variable entrará en la base.

Se examinan las proporciones, fijándonos en el sistema de restricciones originales y sabremos entonces también qué variable sale de la base.

Con estos nuevos datos y siempre los datos del enunciado, podemos construir B y, consecuentemente, B^{-1}. Una vez obtenida esta última matriz, calculamos $\bar{b} = B^{-1}b$.

¿Será óptima la solución obtenida esta vez? Hemos de estudiar los beneficios relativos de las variables no básicas. Se tienen mediante:

$$\bar{c}_i = c_i - c_{\mathrm{B}} \bar{P}_i = c_i - \underbrace{c_{\mathrm{B}} \cdot (B^{-1}}_{\substack{\text{vector de} \\ \text{multiplicadores}}} P_i) = c_i - \pi P_i$$

Este *vector de multiplicadores* se representa, como se indica, por π, cambia con cada tabla y es el que le da nombre a la mejora. Además, el primero de ellos coincide con c_{B}, ya que $\pi = c_{\mathrm{B}} B^{-1}$ y la primera B^{-1} es la identidad en un primer momento.

El proceso se repite mientras se encuentren valores de los beneficios relativos que así lo requieran (positivos en maximización y negativos en minimización).

Las únicas pegas de este método son la posibilidad de que en realidad se haga más lento (haciéndolo a mano) y el cálculo de matrices inversas, aunque no hace falta en realidad.

Si nos fijamos en las tablas del Simplex y en los valores de las matrices B^{-1}, vemos que éstas aparecen en aquéllas debajo de las posiciones ocupadas por las variables básicas en la tabla original. Sabiendo esto, sólo necesitamos pivotar sobre el trozo de tabla que nos interesa para obtenerlas, ya que teniendo B^{-1} lo tenemos todo, pues podemos calcular $\bar{b}$ y también π, y con ésta los $\bar{c}_i$.

4.3. Ventajas del método revisado sobre el método regular

a) Se reduce el número de cálculos, sobre todo si el número de variables es mayor que el de restricciones (hay un mayor número de columnas que se calculan innecesariamente con el Simplex regular).

a) Ya que todos los datos que se requieren en cada momento se obtienen de los datos originales, se ahorra espacio en memoria (hay que almacenar menos datos para pasar de una tabla a otra).

a) Hay menos errores de redondeo al calcular, porque sólo se trabaja con los datos cuando se necesitan.

a) Si en un problema tenemos muchos ceros, en el Simplex regular las iteraciones para un par de tablas los hacen desaparecer. Con el Simplex revisado, como siempre se usan los datos originales, se mantendrán esos ceros, con lo cual se harán menos cálculos.

Estas ventajas se aprecian, no obstante, cuando se trabaja con problemas que involucran grandes cantidades de datos (variables y restricciones).

4.4. Pasos generales del método revisado del Simplex

Recordemos la forma estándar de un p.p.l. (en notación matricial):

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & Z = CX & \\ \text{sujeto a} & AX = b & \text{con } X \geqslant 0 \end{array}$$

donde

$$A_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b_{(m\times 1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Denotemos por $P_1, P_2, \dots, P_n$ las columnas de la matriz A:

$$P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Supongamos que tenemos una s.f.b. con variables básicas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (las m primeras) $(n > m)$. La matriz Básica viene dada por

$$B_{(m\times m)} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

y su inversa entonces,

$$B^{-1}_{(m\times m)} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \beta_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mm} \end{bmatrix}$$

Particionemos el vector X en dos de la forma $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$, donde $X_B \equiv$ variables básicas y $X_N \equiv$ variables no básicas. Así:

$$X_{B(m\times 1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad X_{N((n-m)\times 1)} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La s.f.b. actual viene dada por

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \beta_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{11}b_1 + \beta_{12}b_2 + \ldots + \beta_{1m}b_m \\ \beta_{21}b_1 + \beta_{22}b_2 + \ldots + \beta_{2m}b_m \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \\ \beta_{m1}b_1 + \beta_{m2}b_2 + \ldots + \beta_{mm}b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} \beta_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{m} \beta_{2k}b_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \beta_{mk}b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}$$

y

$$X_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El valor de la función del objetivo con respecto a la base B es

$$Z = CX = C_B X_B = c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + \ldots + c_m\bar{b}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k\bar{b}_k$$

Para comprobar si esta solución es óptima, el método del Simplex revisado calcula los *multiplicadores*:

$$\Pi_{(1\times m)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{pmatrix} = C_B B^{-1}$$

$$\Pi = C_B B^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \beta_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} \end{bmatrix}$$

De donde

$$\begin{aligned} \pi_1 &= c_1\beta_{11} + c_2\beta_{21} + \dots + c_m\beta_{m1} &&= \sum_{k=1}^{m} c_k\beta_{k1} \\ \pi_2 &= c_1\beta_{12} + c_2\beta_{22} + \dots + c_m\beta_{m2} &&= \sum_{k=1}^{m} c_k\beta_{k2} \\ &\vdots \\ \pi_m &= c_1\beta_{1m} + c_2\beta_{2m} + \dots + c_m\beta_{mm} &&= \sum_{k=1}^{m} c_k\beta_{km} \end{aligned}$$

Los beneficios relativos están dados por

$$\bar{c}_j = c_j - \Pi P_j \qquad \text{con } j = m+1, m+2, \dots, n$$

Así,

$$\begin{aligned} \bar{c}_{m+1} &= c_{m+1} - \Pi P_{m+1} &&= c_{m+1} - \underbrace{(\pi_1 a_{1,m+1} + \pi_2 a_{2,m+1} + \dots + \pi_m a_{m,m+1})}_{\sum_{k=1}^{m} \pi_k a_{k,m+1}} \\ \bar{c}_{m+2} &= c_{m+2} - \Pi P_{m+2} &&= c_{m+2} - \underbrace{(\pi_1 a_{1,m+2} + \pi_2 a_{2,m+2} + \dots + \pi_m a_{m,m+2})}_{\sum_{k=1}^{m} \pi_k a_{k,m+2}} \\ &\vdots \\ \bar{c}_n &= c_n - \Pi P_n &&= c_n - \underbrace{(\pi_1 a_{1,n} + \pi_2 a_{2,n} + \dots + \pi_m a_{m,n})}_{\sum_{k=1}^{m} \pi_k a_{k,n}} \end{aligned}$$

Considerando un problema de minimización, la solución será óptima si todos los $\bar{c}_j$ verifican $\bar{c}_j \geqslant 0$ (en caso de maximización, $\bar{c}_j \leqslant 0$). De otro modo, se selecciona la variable no básica con mayor valor negativo (o, recíprocamente, positivo) $\bar{c}_j$ para entrar en la base[1].

[1] En algunos programas que implementan este algoritmo, sin embargo, no se calculan todos los $\bar{c}_j$; en cuanto aparece alguno negativo (positivo), la variable básica correspondiente a éste entra en la base.

Supongamos que seleccionamos x_n para entrar en la base. Entonces, la columna pivote es P_n, que se transformará:

$$\bar{P}_{n(m\times 1)} = B^{-1}P_m = \begin{bmatrix} \beta_{11}a_{1n} + \beta_{12}a_{2n} + \ldots + \beta_{1m}a_{mn} \\ \beta_{21}a_{1n} + \beta_{22}a_{2n} + \ldots + \beta_{2m}a_{mn} \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \\ \beta_{m1}a_{1n} + \beta_{m2}a_{2n} + \ldots + \beta_{mm}a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} \beta_{1k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^{m} \beta_{2k}a_{kn} \\ \ldots \\ \sum_{k=1}^{m} \beta_{mk}a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{2n} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

Ahora hay que aplicar la regla de la mínima proporción. Supongamos que sea:

$$\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{2n}} = \text{ mínimo }_{\bar{a}_{in}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{in}} \right\} \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, m$$

Dado que la mínima proporción ocurre en la segunda fila[2], x_2 deja la base, y entra x_n. Se realiza, pues, un pivotaje sobre la inversa de la base B^{-1} y las constantes de la derecha $\bar{b}$, usando $\bar{a}_{2n}$ como pivote. Esto nos da la nueva inversa básica, y las constantes con respecto a las nuevas variables básicas $(\ x_1 \quad x_n \quad x_3 \quad x_4 \quad \ldots \quad x_m\ )$.

Denotemos por b^* las nuevas constantes:

$$b^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix}$$

y la nueva inversa de la matriz básica por

$$(B^*)^{-1}_{(m\times m)} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^* & \ldots & \beta_{1m}^* \\ & \ddots & \\ \beta_{m1}^* & \ldots & \beta_{mm}^* \end{bmatrix}$$

donde

[2] Lo suponemos así para continuar el ejemplo.

$$\begin{aligned}
b_2^* &= \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{2n}} \\
b_i^* &= \bar{b}_i - (\frac{\bar{a}_{in}\bar{b}_2}{\bar{a}_{2n}}) \qquad \forall i = 1,3,\ldots,m \\
\beta_{2j}^* &= \frac{\beta_{2j}}{\bar{a}_{2n}} \qquad j = 1,2,\ldots m \\
\beta_{ij}^* &= \beta_{ij} - (\frac{\bar{a}_{in}\beta_{2j}}{\bar{a}_{2n}}) \qquad j = 1,2,\ldots,m \quad i = 1,3,\ldots,m
\end{aligned}$$

La nueva s.f.b. es:

$$x_1 = b_1^*, x_n = b_2^*, x_3 = b_3^*, \ldots, x_m = b_m^*$$

$$x_2 = x_{m+1} = \ldots = x_{n-1} = 0$$

Ahora se calculan los multiplicadores y los $\bar{c}_j$ para comprobar si la solución es óptima y se repite el proceso.

Capítulo 5

Teoría de la dualidad

5.1. Formulación del problema dual

Esta teoría de basa en que, asociado a todo problema de programación lineal, tenemos otro problema de programación lineal que se llama su **dual**, de manera que al resolver uno de los dos automáticamente (o mediante unos pasos sencillos) tendremos la solución del otro.

El interés de esto (además del puramente matemático) está en que si tenemos un p.p.l. complicado, tal vez la resolución de su *dual* sea más sencilla.

5.1.1. ¿Cómo se construye el dual de un problema?

Diferenciaremos dos casos: problemas en **forma simétrica** y **asimétricos**.

Definición

Decimos que un p.p.l. está en **forma simétrica** si las *variables* son todas *mayores o iguales que cero* y las *restricciones* son todas de *desigualdad*, siendo desigualdades *menor o igual* si el problema es de maximizar y *mayor o igual* si el problema es de minimizar.

Al problema original se le llamará problema **primal**. Para construir el dual se siguen una serie de reglas, que son:

- El dual tendrá tantas restricciones como variables el primal y viceversa (tantas variables tendrá el dual como restricciones el primal). A cada restricción del dual se asocia una variable del primal y a cada restricción del primal una variable del dual.
- Si uno de ellos es un p.p.l. de maximizar, el otro es de minimizar.
- Si el problema primal es de restricciones menor o igual, el dual es de mayor o igual.
- Los costes de la función del objetivo en el primal (c_j) pasan a ser las constantes de la derecha en el dual (b_i), y los costes en el dual son las cosantes de la derecha en el primal.

Ejemplo:

PRIMAL

Sea Max $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ con:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\ & & & & \ldots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & a_{mn}x_n & \leqslant & b_m \\ & & & & & & & \\ x_i \geqslant 0 & & & & & & & \end{array}\right\}$$

DUAL

Entonces Min $z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$ con:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \ldots & a_{m1}y_m & \geqslant & c_1 \\ a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \ldots & a_{m2}y_m & \geqslant & c_2 \\ & & & & \ldots & & & \\ a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \ldots & a_{mn}y_m & \geqslant & c_n \\ & & & & & & & \\ y_i \geqslant 0 & & & & & & & \end{array}\right\}$$

Los a_{ij} son simétricamente los mismos.

PROPIEDAD

El dual del dual es el primal.

Estudiaremos las relaciones entre los dos problemas y cómo nos pueden servir a nuestro objetivo.

5.1.2. Notación matricial

Expresado en notación matricial, se escribiría:

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & cx \\ Ax & \leqslant & b \\ x & \geqslant & 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \text{Min } w & = & yb \\ yA & \geqslant & c \\ y & \geqslant & 0 \end{array}$$

Obsérvese que no se han indicado las matrices traspuestas, ya que en realidad lo correcto será escribir:

$$y^tA \geqslant c$$

5.2. Interpretación económica del problema dual

Lo veremos con un ejemplo. Sea el siguiente problema de transporte:

$$\text{Min } z = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 5x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23}$$

	M_1	M_2	M_3	
A_1	2	4	3	300
A_2	5	3	4	600
	200	300	400	

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & \leqslant & 300 \\
& & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \leqslant & 600 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & \geqslant & 200 \\
& & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & \geqslant & 300 \\
& & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & \geqslant & 400 \\
\\
& & & & & & & & & & x_{ij} & \geqslant & 0
\end{array}\right\}$$

En forma simétrica:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
-x_{11} & - & x_{12} & - & x_{13} & & & & & & & \geqslant & -300 \\
& & & & & & -x_{21} & - & x_{22} & - & x_{23} & \geqslant & -600 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & \geqslant & 200 \\
& & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & \geqslant & 300 \\
& & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & \geqslant & 400 \\
\\
& & & & & & & & & & x_{ij} & \geqslant & 0
\end{array}\right\}$$

Su dual es:

$$\text{Max } w = -300y_1 - 600y_2 + 200y_3 + 300y_4 + 400y_5$$

$$\left.\begin{array}{rcrcl}
-y_1 & + & y_3 & \leqslant & 2 \\
-y_1 & + & y_4 & \leqslant & 4 \\
-y_1 & + & y_5 & \leqslant & 3 \\
-y_2 & + & y_3 & \leqslant & 5 \\
-y_2 & + & y_4 & \leqslant & 3 \\
-y_2 & + & y_5 & \leqslant & 4 \\
\\
& & y_i & \geqslant & 0
\end{array}\right\}$$

A este dual se le puede dar la siguiente interpretación:

y_1, y_2 ptas/úd a las que se paga

y_3, y_4, y_5 " a las que se vende

$y_3 - y_1 \longrightarrow$ lo que se recibe neto por cada úd que va de A_1 a M_1

Se trataría de minimizar el coste total, también. Lo que veremos es que:

$$\boxed{z^{\text{opt}} = w^{\text{opt}}}$$

(lo que hay que gastar en un óptimo es lo que se gana en el otro).

5.3. Teoremas de la dualidad

Veremos a continuación las relaciones que hay entre las soluciones del primal y el dual. Para estudiar esto tenemos una serie de teoremas.

Recordemos siempre que operamos sobre dos problemas simétricos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Max } Z = cX & \qquad & \text{Min } W = Yb \\ AX \leqslant b & & yA \geqslant c \\ X \geqslant 0 & & Y \geqslant 0 \end{array}$$

Teorema 1. *Teorema Débil de la Dualidad*

Si X_0, Y_0 son soluciones factibles del primal y del dual respectivamente, entonces

$$Z(X_0) \leqslant W(Y_0)$$

DEMOSTRACIÓN

Sea X_0 solución del primal $\Rightarrow AX_0 \leqslant b$ y $X_0 \geqslant 0 \Rightarrow Y_0AX_0 \leqslant Y_0b$.

Y sea Y_0 solución del dual $\Rightarrow Y_0A \geqslant c$ y $Y_0 \geqslant 0 \Rightarrow Y_0AX_0 \geqslant cX_0$.

De donde se deduce que $cX_0 \leqslant Y_0b$.

Corolario 1.

El valor de la función del objetivo z del problema primal para cualquier solución factible es siempre una cota inferior para el mínimo de la función del objetivo w del problema dual.

Corolario 2.

El valor de la función del objetivo w del problema dual para cualquier solución factible es siempre una cota superior para el máximo de la función del objetivo z del problema primal.

Corolario 3.

Si el primal tiene solución no acotada ($z \to \infty$), entonces el dual es no factible.

Corolario 4.

Si el dual es no acotado, el primal es no factible.

Corolario 5.

Si el primal tiene solución y el dual no, entonces el primal es no acotado.

Corolario 6.

Si el dual tiene solución y el primal no, entonces el dual es no acotado[1].

[1] Es decir, si uno de ello no tiene solución, el otro o no la tiene tampoco o sí la tiene pero es no acotado.

Teorema 2. ***Criterio de Optimalidad***

Si existen soluciones factibles X_0, Y_0 del primal y el dual respectivamente, de modo que $cX_0 = Y_0 b \Rightarrow X_0, Y_0$ son soluciones óptimas del primal y el dual respectivamente.

DEMOSTRACIÓN

Sean X_0, Y_0 s.f. tales que $cX_0 = Y_0 b$. Supongamos que sea X' la s.f. óptima del primal. Aplicando el teorema 1 a $X', Y_0 \Rightarrow cX' \leqslant Y_0 b = cX_0 \quad \forall X'$, lo que contradice nuestra hipótesis sobre X'.

La demostración para Y_0 es totalmente análoga.

Teorema 3. ***Teorema Fundamental o Principal de la Dualidad***

Si el problema primal y el dual tienen soluciones factibles, entonces los dos tienen *soluciones óptimas* cuyos valores de la *función del objetivo coinciden.*

DEMOSTRACIÓN

Si tienen s.f., entonces sabemos que o tienen óptimas o son no acotados. Pero pueden acotarse uno al otro, ya que ambos tienen s.f., de modo que tienen óptimas[2].

Los teoremas 2 y 3 pueden conjugarse en:

$$X_0, Y_0 \text{ óptimas} \iff cX_0 = Y_0 b$$

Teorema 4. ***Teorema de la Holgura Complementaria***

Sean X_0, Y_0 s.f. del primal y el dual respectivamente. Se cumple que X_0, Y_0 son óptimas $\iff Y_0 \underbrace{(b - AX_0)}_{u_0} + \underbrace{(Y_0 A - c)}_{v_0} X_0 = 0$.

DEMOSTRACIÓN

$Y_0(b - AX_0) + (Y_0 A - c)X_0 = 0$ se cumple $\iff$ $Y_0 b - Y_0 A X_0 + Y_0 A X_0 - cX_0 = 0 \iff Y_0 b = cX_0$, que es algo que ya sabíamos[3].

Nótese que como de costumbre no indicamos explícitamente la presencia de traspuestas. Los vectores u_0 (de m componentes) y v_0 (de n componentes) se denominan *vectores de holgura* y se obtienen de sustituir en $AX \leqslant b$ y en $YA \leqslant c$ las soluciones X_0 e Y_0. Por tanto, este teorema afirma que la suma de los productos de una solución por el vector de holguras en el otro problema es nula.

[2] También puede deducirse como consecuencia de los corolarios del teorema 1.

[3] La implicación en el sentido $\Rightarrow$ nos la da el teorema 3 y en el sentido $\Leftarrow$ el teorema 2.

El caso es que todas las coordenadas de los cuatro vectores de la expresión del teorema 4 son mayores o iguales que cero, por tanto la suma de los productos en dicha expresión sólo puede dar cero si cada una de las multiplicaciones son nulas. Es decir, X_0 e Y_0 son óptimas si

$$Y_0(b - AX_0) = 0 \quad \text{en cada una de sus componentes}$$

$$(Y_0A - c)X_0 = 0 \quad \text{en cada una de sus componentes}$$

O, lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} y_0^i u_0^i = 0 & i = 1, \dots m \\ v_0^j x_0^j = 0 & j = 1, \dots n \end{cases}$$

Resolviendo uno de los dos problemas, el primal o el dual, y aplicando esto, se pueden obtener las soluciones del otro.

5.4. Problemas primal-dual asimétricos

Sea el problema:

$$\text{Max } z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 20 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & \geqslant & 10 \\ x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ & & & & \\ & & x_1 & \geqslant & 0 \\ & & x_2 & & \text{cualq. valor} \end{array}\right\}$$

No está en forma simétrica. ¿Cómo se construye el dual? Las reglas son básicamente las mismas: cada variable del primal se asocia con una restricción del dual y viceversa, para saber cómo son las restricciones del dual nos fijamos en las variables correspondientes del primal, y lo mismo para las variables. Así,

DUAL $$\text{Min } w = 20y_1 + 10y_2 + 5y_3$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & \geqslant & 4 \\ 2y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & = & 5 \\ & & & & & & \\ & & & & y_1 & \geqslant & 0 \\ & & & & y_2 & \leqslant & 0 \\ & & & & y_3 & & \text{cualq. signo} \end{array}\right\}$$

Lo sintetizamos en la siguiente tabla:

MAX	MÍN
A	A^t
b	c
c	b
i-ésima variable $\geqslant 0$	i-ésima restricción $\geqslant 0$
i-ésima variable $\leqslant 0$	i-ésima restricción $\leqslant 0$
i-ésima variable *cualquier signo*	i-ésima restricción $=$
i-ésima restricción $\geqslant 0$	i-ésima variable $\leqslant 0$
i-ésima restricción $\leqslant 0$	i-ésima variable $\geqslant 0$
i-ésima restricción $=$	i-ésima variable *cualquier signo*

Así pues, podemos construir el dual de cualquier problema. Pero ¿qué relación hay entre las soluciones en este caso? ¿Ocurre lo mismo que en el caso de problemas simétricos? La respuesta es afirmativa: los mismos resultados son igualmente válidos en general.

Sólo una aclaración con respecto a las *holguras complementarias*. Para aplicar en este contexto el teorema 4 debemos sustituir la expresión $Y_0(b - AX_0) + (Y_0A - c)X_0 = 0$ por $\mathbf{Y_0u_0 + v_0X_0 = 0}$, más general, donde u_0, v_0 son los vectores de holguras, que en ocasiones serán $u_0 = b - AX_0, v_0 = Y_0A - c$, pero en otras $u_0 = AX_0 - b, v_0 = c - Y_0A$.

Además, ahora los cuatro vectores no tienen por qué tener todas sus componentes positivas, de modo que sólo podemos afirmar que:

$$X_0, Y_0 \text{ óptimas } \Leftrightarrow Y_0u_0 + v_0X_0 = 0 \Leftarrow \begin{cases} y_0^i u_0^i = 0 & i = 1, \dots m \\ v_0^j x_0^j = 0 & j = 1, \dots n \end{cases}$$

es decir, en la última implicación sólo se garantiza el sentido hacia la izquierda, no hacia la derecha.

De todos modos, a efectos prácticos nos da igual porque lo que queremos es encontrar X_0, Y_0 que verifiquen la expresión central, de suerte que por tanto sean óptimas.

¿Y si el problema está en forma estándar?

Aplicando lo visto en esta sección,

$$\begin{array}{ccc} \text{Max } Z = cX & \longleftrightarrow & \text{Min } W = Yb \\ AX = b & & yA \geqslant c \\ X \geqslant 0 & & Y \text{cualquier signo} \end{array}$$

Y viceversa:

$$\begin{array}{ccc} \text{Min } Z = cX & \longleftrightarrow & \text{Max } W = Yb \\ AX = b & & yA \leqslant c \\ X \geqslant 0 & & Y \text{cualquier signo} \end{array}$$

En este caso las *holguras complementarias* son más sencillas, ya que $Y_0(b - AX_0) = 0$ y $Y_0(AX_0 - b)$ (respectivamente en cada uno de los dos casos), por tanto su expresión resulta:

$$(Y_0A - c)X_0 = 0 \quad \text{o bien} \quad (c - Y_0A)X_0 = 0$$

5.5. Solución dual óptima a partir de la tabla óptima primal

Ahora veremos cómo, resuelto uno de los dos problemas, podemos tener la solución del otro automáticamente.

Sea el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Max } Z = cX & \text{Min } W = Yb \\ AX = b & yA \geqslant c \\ X \geqslant 0 & Y \text{cualquier signo} \end{array}$$

Supongamos que resolvemos el primal por el método del Simplex Revisado y obtenemos

$$X^{\text{opt}} = \begin{pmatrix} x_{\text{B}} \\ \dots \\ x_{\text{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

donde B^{-1} es la inversa de la matriz básica en la tabla óptima del primal y $\mathbf{0}$ representa una columna de ceros con tantos elementos como variables no básicas.

$$Z^{\text{opt}} = cX^{\text{opt}} = c_{\text{B}}x_{\text{B}} = c_{\text{B}}B^{-1}b$$

Además, si estábamos maximizando y hemos hallado el óptimo, se cumple:

$$\bar{c}_j = c_j - \Pi P_j \leqslant 0 \qquad j = 1 \dots n$$

en concreto, los beneficios relativos de las variables básicas serán nulos.

En forma matricial:

$$(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n) - \pi(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$\text{vector de elementos } \leqslant 0 = c - \pi A$$

o sea que

$$c - \pi A \leqslant 0 \Rightarrow \boxed{\pi A \geqslant c}$$

Así que π es solución factible para el problema dual. Veamos cuánto vale w para este caso:

$$w(\pi) = \pi b = c_{\text{B}}B^{-1}b = z^{\text{opt}}$$

Y por el teorema 2 concluimos que ambas soluciones son óptimas para sus respectivos problemas.

El *vector de multiplicadores* es el **óptimo** del *dual*.

Ahora bien, en cualquier tabla $z = c_{\text{B}}B^{-1}b = w(\pi) = c_{\text{b}}B^{-1}b$, ¿son todas ellas soluciones óptimas? Claro que no, en este razonamiento falla que π no es s.f. en todas las tablas, sino sólo cuando llega a cumplirse que $\pi A \geqslant 0$, que es sólo cuando todos los beneficios relativos son negativos (maximizando).

Un apunte más: En la primera “iteración” se cumple que $\pi =$ *costes de las variables básicas iniciales* $-$ *beneficios relativos de las mismas*, ya que B es la identidad y por tanto su inversa también. Si además las variables básicas iniciales son de holgura, entonces $\pi = -$ *beneficios relativos de las variables básicas.*

Capítulo 6

El Método Dual del Simplex

El llamado **Método Dual del Simplex**, que analizaremos en este tema, no se diferencia significativamente del ya visto. El procedimiento es básicamente el mismo, pero con *otras reglas de entrada y salida.*

Además, en general, para la resolución de un problema de programación lineal, este método es considerablemente peor en eficiencia. El motivo principal de que lo veamos reside en su posterior utilización en capítulos venideros.

6.1. Conceptos fundamentales. Bases factibles primal y dual

La mayoría de los conceptos que citamos a continuación nos son ya familiares, aunque ahora los veremos en notación matricial.

Sea el problema:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Min} & Z & = & cX \\ & AX & = & b \\ & X & \geqslant & 0 \qquad \text{(forma estándar)} \end{array}$$

Tenemos

$A_{m\times n} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$
n variables, columnas de longitud m
m número de restricciones (suponemos $n > m$)

Una **base** B es una matriz $B_{m\times n}$ con m columnas *linealmente independientes*.

Dada una **base**, una **solución básica** estará formada por unas variables básicas que se obtienen $x_B = B^{-1}b$, y unas variables no básicas que valdrán cero $x_N = 0$.

Cuando además $x_B = B^{-1}b \geqslant 0$, la solución además de ser básica es **factible**.

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \text{s.f.b.}$$

Y se dirá que B es **matriz factible básica** del primal.

Si para la s.f.b. se cumple además que $\bar{c}_j = c_j - \pi P_j = c_j - c_B B^{-1} P_j \quad \forall j \geqslant 0$, la solución se llama **solución óptima** y es lo que siempre buscamos.

La matriz B que cumple lo anterior se llama **matriz básica óptima** del primal.

$$\left.\begin{array}{l} B^{-1}b \geqslant 0 \\ c_j - c_B B^{-1} P_j \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad B \text{ óptima del primal}$$

Se dice que una matriz básica B es **factible del dual** si verifica:

$$c_j - c_B B^{-1} P_j \geqslant 0 \quad \forall j$$

recordando siempre que hablamos sobre la base de que el problema original es de minimizar. Se demuestra porque para el dual:

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & W = Yb & \\ & YA \leqslant c & \qquad c - \pi A \geqslant 0 \Leftrightarrow \pi A \leqslant c \\ & y \text{ cualq. signo} & \end{array}$$

de modo que una B factible de ambos a la vez sería óptima del primal.

Partiremos de esa B factible del dual buscando llegar a cumplir la otra condición para el primal, esto es, $B^{-1}b \geqslant 0$ (en realidad $b \geqslant 0$).

Uno de los motivos por los que este método no es operativo es precisamente que encontrar $b \geqslant 0$ (s.f.b. del primal) como hacíamos hasta ahora y luego buscar que los $\bar{c}_j \geqslant 0$, es mucho más sencillo que hacerlo al revés, que es lo que se pretende de esta manera.

6.2. Desarrollo del método dual del Simplex

Sea el problema ya especificado antes:

$$\begin{array}{rcl} \text{Min} \quad Z & = & cX \\ AX & = & b \\ X & \geqslant & 0 \end{array}$$

y supongamos que hemos encontrado una solución básica en la que los beneficios relativos sean todos mayores o iguales que cero[1].

Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que esa solución básica la integran las m primeras variables[2], de suerte que escribimos la tabla correspondiente y nos queda:

[1]Esto es lo realmente difícil.

[2]Recordemos de nuevo que asumimos también que $n > m$.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc|c}
 & x_1 & \dots & x_r & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_s & \dots & x_n & \\
\hline
x_1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1,s} & \dots & y_{1,n} & \bar{b}_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
x_r & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & y_{r,m+1} & \dots & y_{r,s} & \dots & y_{r,n} & \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{m,s} & \dots & y_{m,n} & \bar{b}_m \\
 & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 1}}_{I}} & & & & & & \\
\hline
 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \bar{c}_{m+1} & \dots & \bar{c}_s & \dots & \bar{c}_n &
\end{array}
$$

Cuando los términos $\bar{b}_j \geqslant 0$, habremos acabado. Entretanto, pasaremos de una tabla a otra equivalente intentando aproximarnos cada vez más a la solución óptima, como solemos, pero ¿cómo se elige en este método quién entra y quién sale?

CRITERIO DE SALIDA

Sale la variable x_r cuya constante de la derecha sea más negativa (en este caso, ya que minimizamos):

$$x_r \quad / \quad \bar{b}_r = \min_{\bar{b}_j < 0} \quad \bar{b}_j$$

CRITERIO DE ENTRADA

Una vez que decidimos quién va a salir de la base, intentamos que $\bar{b}_r$ pase a ser positivo, haciendo en este caso las proporciones entre los c_i y los $y_{i,j}$. La estrategia de las proporciones es *inversa*, elegimos sólo entre los *coeficientes negativos*, ya que así $\bar{b}_r/y_{r,s} \geqslant 0$. Es decir, entra x_s tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{y_{r,s}} = \max_{y_{r,s}<0} \quad \frac{\bar{c}_j}{y_{r,j}}$$

Esta regla se denomina **regla de la máxima proporción**, y funciona porque asegura que en la siguiente tabla los $\bar{c}_j$ siguen siendo mayores o iguales que cero. Lo veremos:

> Elegido el pivote, como siempre se divide su fila por él. Después se calcularán los nuevos $\bar{c}_j$:
>
> $$\text{nuevo } \bar{c}_j = \bar{c}_j - \frac{y_{r,j}}{y_{r,s}} \cdot \bar{c}_s$$
>
> donde suponemos que $y_{r,s}$ es nuestro pivote. El signo de $\bar{c}_j$ depende de $y_{r,j}$, analizaremos los casos:
>
> 1. Si $y_{r,j} = 0$, entonces nuevo $\bar{c}_j = \bar{c}_j$, de modo que seguirá siendo mayor o igual que cero.
> 2. Si $y_{r,j} \neq 0$, entonces nuevo $\bar{c}_j = y_{r,s}\left(\dfrac{\bar{c}_j}{y_{r,s}} - \dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}}\right)$ y:
>
>   *a*) Si $y_{r,j} > 0$, entonces $\dfrac{\bar{c}_j}{y_{r,j}} \geqslant 0$ y $\dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}} \leqslant 0$, de modo que $\bar{c}_j \geqslant 0$.

b) Si $y_{r,j} < 0$, entonces será uno de entre los que podíamos escoger al aplicar la regla de la máxima proporción[3]; pero de entre ellos, $\dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}}$ es el máximo, de modo que el resultado de la diferencia es positivo y consecuentemente $\bar{c}_j$ también lo es.

¿Cómo cambia el método si se maximiza en lugar de minimizar?

Para el problema:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Max} & Z & = & cX \\ & AX & = & b \\ & X & \geqslant & 0 \end{array}$$

diremos que la **solución óptima del primal** es una solución factible que además cumple:

$$\bar{c}_j = c_j - \underbrace{c_B B^{-1}}_{\pi} P_j \leqslant 0 \qquad \forall j$$

Esta es condición para que sea **factible del dual**. Es **factible del primal** si además $b_i \geqslant 0$.

El resto de definiciones son iguales.

CRITERIO DE SALIDA

El criterio de salida es el mismo, sale

$$x_r \quad / \quad \bar{b}_r = \ \min\ _{\bar{b}_i<0}\bar{b}_j$$

CRITERIO DE ENTRADA

De nuevo se harán las proporciones entre los $\bar{c}_i$ y los posibles "pivotes" (los coeficientes) negativos, para calcular

$$\text{nuevo } \bar{c}_j = \bar{c}_j - \frac{y_{r,j}}{y_{r,s}} \bar{c}_s$$

Los nuevos $\bar{c}_j$ han de segir siendo menores ó iguales que cero, de modo que veamos qué criterio seguiremos:

1. Si $y_{r,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ nuevo $\bar{c}_j = \bar{c}_j$.

2. Si $y_{r,j} \neq 0$, entonces se puede escribir nuevo $\bar{c}_j = y_{r,s}\left(\dfrac{\bar{c}_j}{y_{r,s}} - \dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}}\right)$ y así:

   a) Si $y_{r,j} > 0$, entonces $\dfrac{\bar{c}_j}{y_{r,j}} \leqslant 0$ y $-\dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}}$ también, de modo que el nuevo $\bar{c}_j \leqslant 0$.

   b) Si $y_{r,j} < 0$, necesitamos que $\left(\dfrac{\bar{c}_j}{y_{r,s}} - \dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}}\right)$ sea positivo, $\Rightarrow \dfrac{\bar{c}_s}{y_{r,s}} < \dfrac{\bar{c}_j}{y_{r,j}} \Leftrightarrow y_{r,j}$ es el **mínimo**. El criterio es, pues, inverso.

[3]Si a la hora de aplicarla no hubiese ninguno, nos hallaríamos ante un problema no factible, como veremos.

6.3. Identificación de problemas no factibles

¿Qué ocurre cuando en la fila de la variable que sale (en la que la variable b_i será negativa) no hay ningún coeficiente negativo? En el Simplex regular cuando había una columna con todos los coeficientes negativos teníamos un problema no acotado. En este caso, si ocurre esto, sabremos que el problema es *no factible* (el dual es no acotado).

¿Cuándo será el primal no acotado? ¿Cómo se reflejará esto en la tabla? El primal será no acotado si el dual es no factible, algo que se da precisamente si no somos capaces de encontrar ninguna tabla para el método, pues si somos capaces de calcular una tabla de partida (en la que los $\bar{c}_j$ tengan el signo apropiado), el π de la misma es ya solución factible del dual.

Nos encontraremos con un problema con infinitas soluciones si tenemos beneficios relativos nulos para variables no básicas.

Por último, ya para terminar, comentar que se podría diseñar un Método Revisado del Simplex Dual.

Capítulo 7

Análisis de Sensibilidad y Programación Paramétrica

En este tema se estudian los cambios que se producen en la solución óptima y en la z^{OPT} al variar algunos datos del enunciado, sin tener que volver a resolver todo el problema.

Esto es algo importante porque en la vida real muchas veces los datos que manejamos son *estimaciones*, y siempre es interesante conocer cómo y cuándo pequeños cambios producen grandes variaciones.

Haremos el estudio para:

- Cambios en los costes c_j de la función del objetivo.
- Cambios en las constantes de la derecha b_i.
- Cambios en la matriz de coeficientes A:
  - Añadir variables (una columna más).
  - Añadir restricciones (una fila más).
  - Cambiar un dato ya existente.

Para hacer el *análisis de sensibilidad*, primero resolveremos el problema utilizando cualquier variante del Método del Simplex.

A continuación analizaremos la repercusión de las distintas posibilidades que acabamos de mencionar.

7.1. Modificaciones en los coeficientes de la función del objetivo

Diferenciaremos dos casos, según cambiemos el coste de:

a) una variable básica

b) una variable no básica

en la tabla óptima.

7.1.1. Modificación del c_j de una variable no básica

Cambiar un coste c_j no supone prescindir del cuerpo central de la tabla óptima, ya que ésta se obtiene a partir de combinaciones lineales, $\bar{P}_j = B^{-1}P_j$. Lo que varía es el *beneficio relativo* $\bar{c}_j$, ya que $\bar{c}_j = \mathbf{c_j} - \pi P_j = \mathbf{c_j} - c_B\bar{P}_j$. Una vez recalculado éste pueden ocurrir tres cosas:

1. Si el nuevo $\bar{c}_j \leqslant 0$, el óptimo no va a variar.

2. Por el contrario, si $\bar{c}_j \geqslant 0$ (estamos hablando en el caso de una maximización), la tabla óptima deja de serlo y es el punto de partida para alcanzar una nueva solución óptima.

3. El valor para el cual $\bar{c}_j = 0$ es el *límite*, para el cual nos encontraremos con un problema con múltiples soluciones.

7.1.2. Modificación del c_j de una variable básica

De nuevo podemos reutilizar la parte central de la tabla óptima, pero en este caso no cambia el $\bar{c}_j$ asociado a la variable cuyo coste se modifica (ya que es básica y su valor seguirá siendo 0), sino todos los $\bar{c}_j$ de las variables no básicas, ya que $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c_B}B^{-1}P_j$.

Si los nuevos $\bar{c}_j$ siguen siendo negativos (recordemos que estamos en el caso de una maximización), el óptimo de nuevo no va a variar. De lo contrario, tendremos una tabla ya no óptima a partir de la cual iterar de nuevo: sabemos qué variable entra (aquélla cuyo $\bar{c}_j$ se haya vuelto más positivo), calcularíamos cuál sale, etc.

7.1.3. Modificaciones múltiples en los costes c_j

Se puede llevar a cabo más de un cambio en los costes c_j de la función del objetivo. Simplemente se cambian también simultáneamente los $\bar{c}_j$ adecuados siguiendo las pautas que acabamos de ver. Evidentemente, puede resultar un proceso más largo porque puede resultarnos más de un $\bar{c}_j$ positivo (en maximización),...

7.2. Modificaciones en las constantes de la derecha b_i de las restricciones

Si aplicamos variaciones en el vector $\mathbf{b}$ vemos que:

$$\begin{array}{lcl} \bar{P}_j = B^{-1}P_j & \longleftarrow & \text{No cambia} \\ \bar{b} = B^{-1}b & \longleftarrow & \text{CAMBIA} \\ \bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1}P_j & \longleftarrow & \text{No cambia} \end{array}$$

Lo que puede pasar al calcular el nuevo $\bar{\mathbf{b}}$ es que resulte:

$\bar{b} > 0$ En este caso el óptimo, una vez más, no varía.

$\bar{b} < 0$ En este caso nos hallamos ante una situación idónea para la aplicación del *Simplex Dual*: una tabla donde los beneficios relativos están bien pero las constantes de la derecha no (de modo que la tabla ya no es óptima -sólo del dual-, ni siquiera nos da una solució factible).

Definición

Llamamos **precio sombra** de la restricción i-ésima de un p.p.l. al cambio que se produce en la z^{OPT} cuando se aumenta una unidad la constante de la derecha correspondiente a dicha restricción.

Esto sólo tiene validez en el intervalo en el que la tabla no deja de ser óptima; en ese caso, la regla se mantiene pero al no ser óptima, debemos seguir calculando hasta llegar a una solución satisfactoria en otra tabla.

Propiedad

El *precio sombra* de la i-ésima restricción coincide con la i-ésima variable óptima del dual.

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que en el óptimo

$$Z^{\text{OPT}} = cX = Yb = W^{\text{OPT}}$$

De modo que si $Z^{\text{OPT}} = Yb$ para una solución Y^0,

$$Z^{\text{OPT}} = y_1^0 b_1 + y_2^0 + \ldots + y_m^0 b_m$$

Si calculamos el precio sombra para b_1,

$$Z^{\text{OPT}} = y_1^0 (b_1 + 1) + y_2^0 b_2 + \ldots + y_m^0 b_m$$

Si recordamos que el vector de multiplicadores $\pi = c_B B^{-1}$ es solución óptima del dual, y que no cambia al modificar alguna constante b_i de la derecha[1], concluimos que esa solución de los duales sigue siendo la misma (π):

$$Z^{\text{OPT'}} - Z^{\text{OPT}} = y_1^0$$

Y sabemos que hay tantas variables duales como restricciones tiene el primal, de modo que la propiedad es consistente[2].

7.3. Modificaciones en la matriz de coeficientes de las restricciones

Veremos varios casos:

[1]Estamos suponiendo que el aumento de una unidad del cálculo del precio sombra del b_i no hace dejar de ser óptima a la tabla en este caso.

[2]Cuando las primeras variables básicas son de holgura, el vector π nos da directamente todos los precios sombra de los b_i.

7.3.1. Adición de nuevas variables

El añadir una nueva variable al problema supone añadir una columna más a la matriz de coeficientes. Recordemos que:

$$\bar{P}_j = B^{-1}P_j$$
$$\bar{c}_j = c_j - c_B\bar{P}_j$$

son los nuevos valores que debemos calcular para la variable que queremos introducir a partir de los nuevos datos que nos den.

Si el beneficio relativo de la nueva variable $\bar{c}_j$ es negativo[3] el óptimo no va a sufrir variaciones. Sin embargo, si es positivo, nos veremos obligados a iterar, puesto que la nueva tabla no será óptima ya. Calcularemos su columna asociada $\bar{P}_j$ para poder decidir qué variable sale de la base para dejar lugar a la nueva que ha sido añadida, etc.

7.3.2. Cambio de un dato en la matriz de coeficientes

De nuevo, pueden ocurrir dos cosas:

- Que se modifique un *dato correspondiente a una variable no básica* en la tabla óptima.
- Que se modifique un *dato correspondiente a una variable básca* en la tabla óptima.

Cambio en un coeficiente asociado a una variable no básica

En ese caso, no varía B^{-1}, sino sólo $\bar{P}_j$ y $\bar{c}_j$, que se recalculan. El procedimiento es análogo al caso en el que añadimos una variable: se calcula primero el $\bar{c}_j$, y si es negativo el óptimo no varía; si es positivo, se calcula $\bar{P}_j$ y se itera.

Cambio en un coeficiente asociado a una variable básica

En este caso, además de $\bar{P}_j$ y $\bar{c}_j$, resulta modificada la matriz B^{-1}, de modo que intentar aprovechar el "trabajo ya hecho" nos reportaría las mismas complicaciones que resolver el problema desde el principio, que es lo que normalmente haremos.

7.3.3. Adición de nuevas restricciones

A la hora de añadir una nueva restricción lo primero que se debe hacer es comprobar si la solución anterior la cumple, ya que si es así, seguirá siendo óptima (supera más "pegas").

En caso contrario, tendremos una nueva tabla con una fila más[4] Sin embargo, esta nueva tabla puede *no ser una tabla del Símplex*, ya que puede no haber una variable básica por ecuación (fila).

Se llevarán a cabo las operaciones con filas necesarias para conseguir la forma canónica en la tabla con los nuevos datos, pero dándonos cuenta de que los *beneficios relativos $\bar{c}_j$ no varían*. Es probable que de nuevo nos hallemos ante una tesitura favorable a la aplicación del Simplex Dual.

---

[3]No debemos olvidar nunca que estamos particularizando para maximizaciones.

[4]Incluso con una columna más, si la nueva restricción requiere la introducción de una variable de holgura.

Definición

> Llamamos **restricciones inactivas** a aquéllas que son poco importantes en nuestro problema. Cuando nos las encontramos, podemos ignorarlas en principio, resolver el problema, y luego ver si la solución las cumple y aplicar el Simplex Dual en caso necesario.

Esto se hace porque el tiempo de computación aumenta con el cubo de las restricciones, es mucho más sensible a su número que al de variables.

7.4. Programación Paramétrica

La **programación paramétrica** consiste sencillamente en realizar lo que hemos estudiado en los apartados anteriores, pero esta vez, en lugar de utilizar valores concretos, usando un *parámetro*, y estudiando posteriormente las distintas soluciones en función de los diferentes valores que éste pueda tomar.

7.4.1. Variación paramétrica de los coeficientes de la función del objetivo

Supongamos que el *parámetro* está en el **vector de costes**. Es decir, tengamos un problema tal que:

$$\begin{array}{rl} \text{Max (Min)} & Z = (c+\lambda\mathbf{c}^*)X \\ \\ & AX = b \\ & X \geqslant 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

donde $\mathbf{c}^*$ es otro vector. Podemos ver fácilmente que, para cada valor de λ se tiene un problema. De lo que se trata es de resolver para cualquier valor y la estrategia comienza por, en primer lugar, resolver uno de los infinitos problemas. Usualmente suele hacerse para el problema concreto que resulta de hacer $\lambda = 0$, es decir:

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & Z = cX \\ \\ & AX = b \\ & X \geqslant 0 \end{array}$$

Se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} x_B^{\text{opt}} & = & B^{-1}b \\ x_N^{\text{opt}} & = & 0 \\ z^{\text{opt}} & & \end{array}$$

$$\text{con} \qquad \bar{c}_j = c_j - c_B\bar{P}_j \leqslant 0 \quad \forall j$$

Posteriormente sustituimos c por $c+\lambda c^*$ y calculamos:

$$\begin{aligned} \bar{c}_j(\lambda) &= (c_j+\lambda c_j^*) - (c_B+\lambda c_B^*)\bar{P}_j \\ &= (c_j - c_B\bar{P}_j) + \lambda(c_j^* - c_B^*\bar{P}_j) \\ &= \bar{c}_j + \lambda\bar{c}_j^* \end{aligned}$$

Mientras los $\bar{c}_j(\lambda) \leqslant 0 \quad \forall j$, la solución hallada para el problema con $\lambda = 0$ seguirá siendo óptima, lo que nos permite hallar el intervalo adecuado para el parámetro λ. Cuando no sea así, iteraremos con el Simplex para calcular el resto de soluciones según los distintos intervalos en $\mathbb{R}$ en los que se pueda encontrar λ.

Haremos notar que en los extremos de los intervalos, las soluciones óptimas hacia un lado y hacia el otro tienen la misma z^{opt}. Son, por tanto, puntos de *soluciones múltiples*.

Una vez resuelto para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, las soluciones pueden reprentarse como una función definida a trozos en unos ejes con λ frente a z.

7.4.2. Variación paramétrica de las constantes de la derecha de las restricciones

También puede ocurrir que el *parámetro* esté en el **vector de términos independientes**. Es decir, un problema como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max (Min)} & Z = cX \\ & \\ & AX = b + \alpha\mathbf{b}^* \\ & X \geqslant 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

De nuevo queremos resolver para cualquier valor de α, y el método es análogo al caso anterior:

1) Calculamos una solución para un valor de α, normalmente $\alpha = 0$, por sencillez, y obtenemos:
$$\begin{array}{rcl} x_B^{\text{opt}} & = & B^{-1}b = \bar{b} \\ x_N^{\text{opt}} & = & 0 \\ z^{\text{opt}} & & \end{array}$$
$$\text{con} \quad \bar{c}_j \leqslant 0 \quad \forall j$$

2) Sobre la tabla óptima hallada, sustituimos b por $b + \alpha b^*$; sólo van a cambiar las constantes de la derecha,
$$\begin{aligned} \bar{b}(\alpha) &= B^{-1}(b + \alpha b^*) \\ &= B^{-1}b + \alpha B^{-1}b^* \\ &= \bar{b} + \alpha\bar{b}^* \end{aligned}$$
el resto de coeficientes, costes y beneficios permanecen iguales, en concreto se tiene $\bar{c}_j \leqslant 0 \quad \forall j$.

3) Con la restricción de que $\bar{b}(\alpha) \geqslant 0$ obtenemos un intervalo adecuado para α (de modo que la solución calculada en el primer paso siga siendo óptima). La nueva $z^{\text{opt}} = c_B\bar{b}(\alpha) = c_B\bar{b} + \alpha c_B\bar{b}^*$ ([5]).

   El resto de intervalos y sus soluciones correspondientes se calculan aplicando el Simplex Dual. También es aplicable lo comentado en el apartado anterior respecto a los extremos de los intervalos y a la representación de las soluciones.

[5] Nótese que, mientras en el caso anterior las x eran constantes dentro de un mismo intervalo, ahora van a depender del valor de α.

Capítulo 8

Programación Lineal Entera

Llamamos **programación lineal entera** a aquélla en la que las variables son *enteras*.

La solución óptima de un p.p.l., tal y como los hemos venido resolviendo hasta ahora, puede no ser entera. No obstante, la *forma continua* de resolución es la más sencilla. Entre las opciones de que disponemos está el *redondeo*:

aunque nada nos asegura que sea lo mejor que podemos hacer, a no ser que los valores de la solución sean muy grandes, en cuyo caso no perderemos demasiado.

Un **problema de programación lineal entera** podría enunciarse de la siguiente manera:

B_i	capital en el período i, con $i = 1 \dots T$
N	posibles proyectos donde invertir
a_{ij}	inversión requerida por el proyecto j durante el período i
b_j	beneficio de la realización del proyecto j

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige el proyecto } j \\ 0 & \text{si no se elige} \end{cases}$$

La función del objetivo:

$$\text{Max} \qquad z = \sum_{j=1}^{N} b_j x_j$$

sujeta a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leqslant B_i \qquad i = 1 \dots T$$

Además, se tienen por defecto las *restricciones lineales y de integridad*:

$$0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad x_j \text{ enteras}, \quad j = 1 \dots N$$

Este sería un caso, en particular, de programación lineal entera **binaria**.

En algunas ocasiones un p.p. entera aparentemente *no lineal* puede transformarse de manera más o menos sencilla en un p.p.l. entera. Para ello contamos con dos planteamientos, que veremos seguidamente.

PRIMER PLANTEAMIENTO

Si, dado un p.p. entera, nos encontramos con que la función del objetivo contiene un producto $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_k$, podemos sustituirlo por $y_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_k$ y añadir las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{k} x_j - y_1 & \leqslant & k-1 \\ - \sum_{j=1}^{k} x_j + k y_1 & \leqslant & 0 \\ x_i, y_1 \in \{0,1\} & & \end{array}$$

SEGUNDO PLANTEAMIENTO: *Planteamiento de Glover y Woolrey*

Otra forma de proceder consiste en sustituir el mencionado producto por otra variable, esta vez sin restricción de integridad, y añadiendo en este caso las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j - x_0 \leqslant k-1$$

$$x_0 \leqslant x_j \qquad \forall j = 1 \dots k$$

Los problemas de programación entera pueden dividirse en dos grandes tipos:

Entera pura Aquélla en que todas las variables de decisión ó *instrumentales* están sujetas a restricción de integridad, es decir, han de ser enteras.

Entera mixta Aquélla en que no todas las variables de decisión han de ser enteras.

8.1. Algoritmo de Ramificación y Acotación (*Brach and bound algorithm*)

Partamos de un problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z = CX \\ \text{sujeto a} \\ \qquad \begin{array}{rcl} AX & = & b \\ X & \geqslant & 0 \end{array} \end{array}$$

con x_j entera $\forall i \in I$

y donde I no tiene por qué ser el conjunto de todos los índices, puede ser un subconjunto (es decir, no restringimos el caso a p.p.l.e. puros, sino que también consideramos los mixtos).

Lo primero que se hace es **resolver la versión continua del problema**, que llamaremos PL-1, esto es, el problema sin restricciones de integridad[1]. Si en la solución hallada hay variables que no son enteras (de lo contrario ya tendremos la solución buscada), entonces se divide la región factible de PL-1 según las mismas. Se bifurca, pues, el problema en dos: PL-2 y PL-3. Si tenemos varias variables no enteras en la solución tenemos que elegir cuál de ellas utilizamos para bifurcar. Para ello existen varias estrategias:

- Seleccionar la variable entera con mayor parte decimal, o bien la que diste más del entero más próximo,...
- Asignar prioridades a las variables:
  - Usando en primer lugar las variables más importantes (de aquéllas entre las que dudamos, las no enteras) en el modelo.
  - Buscando el mejor coste ó beneficio (coeficiente de la función del objetivo), aquél que más afecte al valor de Z.
  - Según exista o no alguna variable crítica en nuestro problema.
- Selección arbitraria (por el número de índice, por ejemplo).

Independientemente de la variable que se escoja en la primera (y/o sucesivas) "particiones" que puedan darse, el *algoritmo funciona siempre*, lo que variará será la rapidez con que encuentre la solución.

Sea x_j la variable no entera en PL-1 (y que ha de serlo en el original) seleccionada, y β_j su valor en PL-1. Se crean, como decimos, dos nuevos problemas, PL-2 y PL-3 de forma que:

PL-2

Max $Z = CX$
sujeto a

$$\begin{array}{rcl} AX & = & b \\ X & \geqslant & 0 \\ \mathbf{x_j} & \leqslant & \beta_{\mathbf{j}}^- \end{array}$$

PL-3

Max $Z = CX$
sujeto a

$$\begin{array}{rcl} AX & = & b \\ X & \geqslant & 0 \\ \mathbf{x_j} & \geqslant & \beta_{\mathbf{j}}^+ \end{array}$$

donde

β_j^- es la parte entera del mayor entero menor o igual que β_j
β_j^+ es la (parte entera)-1 del menor entero mayor o igual que β_j

El proceso se repetirá para PL-2 y PL-3 sucesivamente hasta que todos los *nodos* que se vayan creando lleguen a ser **saturados** o **sondeados**.

[1]Aquéllas que nos restringen los valores de las variables a un valor entero.

Otra cuestión que se nos plantea, una vez dividido el problema, es: ¿Cuál de los PL-i resolver si en ambos nos encontramos de nuevo con variables no enteras que deben tomar valores en $\mathbb{Z}$ en el original? Es decir, ¿cuál escogemos para seguir, PL-2 o PL-3? De nuevo, en lo que respecta al algoritmo da igual, porque éste acabará por sondearlos todos, pero entra de nuevo en escena la eficiencia con que lo hará. En este caso los criterios que se pueden seguir son:

- ▷ Comparar los valores óptimos de la función del objetivo y seguir con aquél cuyo valor sea mejor.
- ▷ Orden LIFO (*last-in-first-out*).

Un *nodo* (subproblema) se dice que está **implícitamente** o **explícitamente saturado ó sondeado** (del inglés, *fathomed*) si y sólo si ocurre una de estas tres cosas:

1) La solución óptima del p.p.l. sin restricciones enteras correspondiente a dicho nodo (PL-i) es entera.
2) El problema PL-i es no factible.
3) El valor óptimo de la función del objetivo del problema PL-i, Z, no es mejor que la cota inferior actual.

De este modo, el algoritmo consiste en proceder de este modo hasta que todos los nodos queden sondeados. Una vez hecho esto, de entre aquéllos nodos que hayan quedado saturados por la primera de las tres razones anteriores, se elige como solución del original la de aquél que tenga mejor valor de Z.

8.2. Recomendaciones de eficiencia en tiempo

A la hora de llevar a la práctica el algoritmo visto en la sección anterior (8.1, página 62), pueden tenerse en cuenta una serie de cuestiones que ayudarán a mejorar su eficiencia en cuanto a tiempo se refiere:

- √ Mantener el número de variables enteras lo más pequeño posible.
- √ Proporcionar cotas ajustadas para las variables enteras.
- √ Adición de nuevas restricciones sobre las variables enteras.
- √ Si no existe una necesidad absoluta de encontrar el óptimo exacto, es recomendable quedarse con cualquier solución factible (entera) que no empeore en más de un 3 % el óptimo del problema continuo.
- √ Elegir para la ramificación la variable entera por orden de prioridades económicas o por experiencia del usuario.

Índice general