

# Medios de Transmisión

Laura M. Castro Souto

Primer Cuatrimestre  
Curso 2000/2001



# Índice de cuadros

8.1. Densidad espectral de potencia.

Función de autocorrelación del ruido. 68



# Capítulo 0

## Presentación

El **objetivo** de la asignatura de *Métodos de Transmisión* es explicar los fundamentos físicos de los sistemas de comunicación digitales.

Veremos que los sistemas de comunicación se dividen en *digitales* y *analógicos*. Veremos también los diferentes tipos de redes de comunicaciones: *medios de transmisión*, *DCE* (Data Communication Equipments) y *conmutadores* (routers). Por último, nos ocuparemos del *límite de velocidad*, que está determinado por el ancho de banda, el ruido y la complejidad del sistema.

## Temario

### Parte 1

**Tema 1.-** Introducción a las comunicaciones digitales.

**Tema 2.-** Conceptos básicos de señales y sistemas.

**Tema 3.-** Sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

**Tema 4.-** Análisis de Fourier de señales y sistemas continuos.

**Tema 5.-** Representación digital de señales analógicas.

### Parte 2

**Tema 6.-** Fundamentos de transmisión digital.

**Tema 7.-** Introducción a procesos estocásticos.

**Tema 8.-** Transmisión banda base por canales con ruido.

**Tema 9.-** Transmisión paso banda.

La primera parte de esta asignatura tiene su continuación en la optativa de primer ciclo **TDS** (*Tratamiento digital de la señal*), mientras que la segunda parte entronca con la optativa de segundo ciclo **Comunicaciones Digitales**.

## Bibliografía

Para los temas 2 a 5 se seguirá el libro “SIGNALS AND SYSTEMS” de A. V. Oppenheim y A. S. Willsky, editorial Prentice Hall (2ª edición, 1997).

Durante la impartición de los temas 6 a 9 se recomienda la consulta de “DIGITAL COMMUNICATIONS FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS” de B. Sklar, editorial Prentice-Hall (1988) o “MODERN DIGITAL AND ANALOG COMMUNICATIONS SYSTEM” de B. P. Lathi, editorial Oxford University Press (1998).

## Requisitos

Se considera que los alumnos asistentes a las clases de la asignatura de Métodos de Transmisión tienen conocimientos de:

- Cálculo diferencial e integral.
- Estadística.
- Variable compleja.

A los alumnos que necesiten o deseen refrescar estos conceptos se les recomiendan los libros “CALCULUS VOL I.” de Tom M. Apóstol, editorial Reverté (2ª edición, 1991, capítulo 9) y “CÁLCULO INFINITESIMAL” de M. Spivak, editorial Reverté (2ª edición, 1990, capítulos 24-25).

# Capítulo 1

## Introducción a las comunicaciones digitales

### 1.1. Concepto de comunicación

Entendemos por **comunicación** la transferencia de información entre dos puntos. Todo *medio de comunicación* o *sistema de transmisiones* consta de cinco partes:



La **fuelle** es lo que contiene la información que queremos transmitir de un punto a otro. El **transmisor** convierte los mensajes en señales. El **canal** es el medio por el cual se transmite, y tiende a distorsionar las señales sólo por el hecho de pasar por él, por lo que los grandes problemas de la comunicación se deben casi siempre al canal. Nosotros, sin embargo, lo trataremos como una *caja negra*, sólo estudiaremos cómo tratar esas distorsiones.

Por último, al **receptor** llegan otras señales, que no tienen por qué ser necesariamente iguales a las que ingresaron en el canal procedentes del transmisor, y son de nuevo decodificadas en mensajes para ser entregada en su **destino**.

Las **comunicaciones** pueden ser **eléctricas**, un tipo particular en las que los mensajes se transforman en señales eléctricas.

Podemos dividir los **canales** en dos tipos:

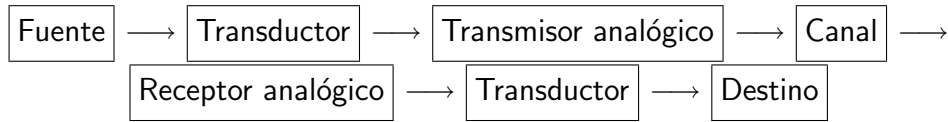
**Guiados**, que requieren un cable que conecte físicamente el emisor y el receptor. Entre ellos contamos con:

- ↔ Cable de pares (teléfono).
- ↔ Cable coaxial (televisión).
- ↔ Fibra óptica.

**No guiados**, por ondas de radio, probablemente el medio que más distorsiona las señales transmitidas; por ello, siempre que sea posible, es preferible utilizar tecnología *wireless*.

Los sistemas de comunicación eléctricos se pueden clasificar también en dos grandes grupos: *analógicos* y *digitales*.

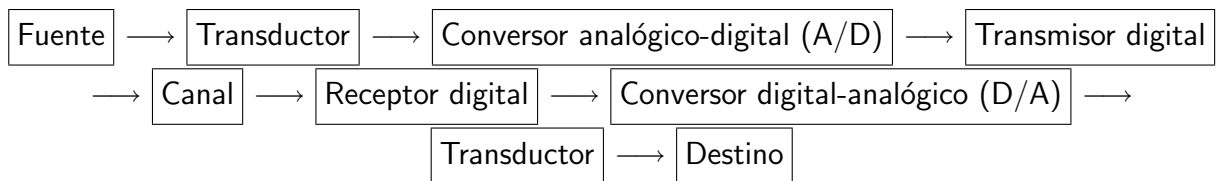
Las **comunicaciones analógicas** son aquéllas en que la señal eléctrica imita a la naturaleza. Su diagrama de bloques típico sería:



El **transductor** convierte las señales de la fuente en señales eléctricas. El **transmisor analógico** es típicamente un amplificador, que le da más fuerza a la señal.

Un ejemplo de comunicación analógica es el teléfono.

Los **sistemas de comunicación digitales** plantean una novedad: la señal que viaja por el canal no trata de imitar a la naturaleza. La señal eléctrica es una forma de onda de entre un conjunto finito.



El **transductor** convierte también en este caso el mensaje en una señal eléctrica. El **convertor A/D** convierte la señal en ceros y unos, y el **transmisor digital** envía unas formas de onda dentro de un conjunto finito.

El **receptor digital** recupera de nuevo a partir de la onda o señal la serie de ceros y unos que pretendían transmitirse.

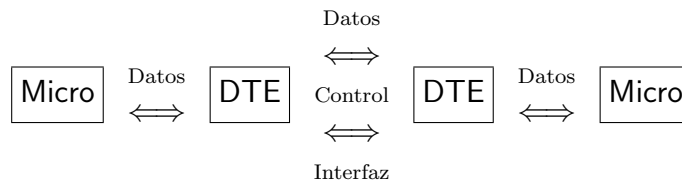
A pesar del coste añadido (más complejo, más bloques), se prefieren los sistemas digitales porque son muy robustos a la hora de superar los inconvenientes de los canales (ver figura 1.3 de transparencias). Además son más volubles, más fácilmente reprogramables (claro que también tienen sus inconvenientes, por ejemplo, si el sistema se cuelga...). Debemos tener en cuenta, no obstante, que el convertor A/D siempre introduce *errores de cuantificación* y que los sistemas digitales tienden a ocupar mucho más ancho de banda que sus contrapartidas analógicas.

Por todo ello, a priori los sistemas analógicos funcionarían mejor que los digitales, aunque hoy en día éstos han avanzado mucho. De todos modos, ninguna afirmación en un sentido u otro puede ser categórica, depende de muchos factores fuera del campo de la ingeniería.

## 1.2. Conexión de dos microprocesadores

### 1.2.1. Conexión de dos micros a corta distancia (50 m.)

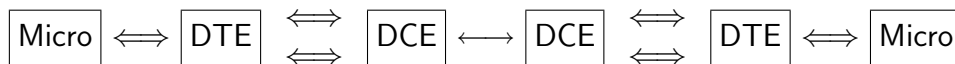
Se utiliza un tipo de circuitos integrados denominados **D.T.E.**<sup>1</sup> (*Data Terminal Equipments*). Tienen unos registros accesibles desde el exterior, de electrónica muy robusta. Ejemplos: UART, USRT, ACIA.



El **interfaz**<sup>2</sup> debe tener muchas conexiones (de datos, de control, ...).

### 1.2.2. Conexión de dos micros a larga distancia

Los circuitos integrados usados en este caso se denominan **DCE** (*Data Communications Equipment*), y son de los que nos ocuparemos. Son ejemplos: los módem, *transceiver* (tarjetas de Ethernet),...



<sup>1</sup>Un tipo de puerto.

<sup>2</sup>Un interfaz típico es el interfaz serie RS-232, aunque también los hay paralelos.



# Capítulo 2

## Conceptos básicos de señales y sistemas

### 2.1. Definición de señal y sistema

Entendemos por **señal** cualquier *magnitud física que varía* con el tiempo, espacio ó cualquier otra variable independiente y que contiene información sobre un fenómeno físico.

Un **sistema** es un *transformador* de señales:



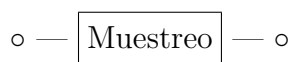
Evidentemente, los sistemas no son sólo eléctricos, pero éstos son los que nosotros trataremos.

### 2.2. Señales continuas y discretas

Una **señal continua** o **analógica** es aquélla señal que se puede representar por una función de una variable independiente continua  $x(t)$ , con  $x$  y  $t$  números reales.

En contraposición, en las **señales discretas** la variable independiente son números enteros, y representamos la función por  $x(n)$ , con  $x$  un número entero y  $t$  un número real.

Muchas veces representaremos señales continuas como discretas, lo cual es más adecuado para el tratamiento con tecnología digital, mediante **muestreo**: Dada una señal continua  $x(t)$ , se construye una señal discreta tomando *muestras*.



$T$  = período de muestreo

### 2.3. Señales reales y complejas

La distinción entre *señales reales* y *complejas* es más que nada matemática:

	Reales	Complejas
<i>Continuas</i>	Correspondencia $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \rightsquigarrow x(t)$	Correspondencia $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $t \rightsquigarrow x(t)_{\text{complejo}}$ con $x(t)_{\text{complejo}} = x_r(t) + jx_i(t)$ $=  x(t) e^{jkx(n)}$
<i>Discretas</i>	Correspondencia $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \rightsquigarrow x(n)$	Correspondencia $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ $n \rightsquigarrow x(n)_{\text{complejo}}$ con $x(n)_{\text{complejo}} = x_r(n) + jx_i(n)$ $=  x(n) e^{jkx(n)}$

Las señales complejas son útiles para la representación de dos señales en una, por ejemplo, en los casos en que las dos señales estén estrechamente relacionadas (señales de un estéreo).

$$x(t) = e^{-0,9t} e^{j\frac{\pi}{10}t} = e^{-0,9t} \cos \frac{\pi}{10}t + j e^{-0,9t} \sin \frac{\pi}{10}t,$$

representación en coordenadas cartesianas obtenida aplicando  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$

## 2.4. Señales de energía finita y potencia media finita

La **potencia instantánea** es una función:

$$p(t) = |x(t)|^2$$

que se mide en *watios*, energía disipada por unidad de tiempo.

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$$R = 1\Omega \Rightarrow p(t) = i^2(t) = v^2(t)$$

La **energía** de  $x(t)$  en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  se define:

$$E_x^T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

que se mide en *julios*.

La **potencia media** de  $x(t)$  en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  es un número, el promedio de la función de la potencia instantánea, y nos viene dada por:

$$P_x^T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{E_x^T}{T}$$

La **energía** de  $x(t)$  la obtenemos:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

si la integral converge, es decir, si  $E_x < \infty$ , decimos que tenemos una *señal de energía finita*.

La **potencia media** de  $x(t)$  es:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

si el límite converge, es decir, si  $P_x < \infty$ , decimos que tratamos una señal de potencia media finita.

Puesto que  $P_x$  es el límite de un cociente, equivale al cociente de los límites  $\Rightarrow$  si la señal tiene energía finita, su potencia media finita es **cero**.

Una señal de potencia media finita tiene de energía infinita (para que se de la indeterminación en el límite...).

## 2.5. Señales deterministas y aleatorias

Las **señales deterministas** se caracterizan porque conocemos su valor en todo instante del tiempo.

En las **señales aleatorias**, en cambio, se desconoce su valor en todo instante del tiempo.

Lo más normal es encontrarse señales aleatorias, aunque su aleatoriedad es relativa; por ejemplo ¿es aleatoria una señal de ruido? Si la conocemos (pasado), podemos pensar que es determinista, y si no la conocemos (futuro), será más lógico considerarla aleatoria.

## 2.6. Operaciones básicas con señales

### 2.6.1. Desplazamiento en tiempo

Como se puede observar:

- si  $t_0 > 0$ , la señal se desplaza **a la derecha** y
- si  $t_0 < 0$ , la señal se desplaza **a la izquierda**.

Un desplazamiento en el tiempo introduce un *retardo* en la señal, pero no distorsiona la forma de la onda<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Recordar el ejemplo del radiocassette.

### 2.6.2. Inversión en tiempo

Una inversión en el tiempo supone *girar* la señal alrededor de  $t = 0$ , y en este caso sí que se produce una distorsión.

Si la inversión en el tiempo *no produce distorsión*, decimos que la señal es **simétrica** o **par**:  $x(t) = x(-t)$ . La señal es **antisimétrica** o **impar** si  $x(t) = -x(-t)$ .

### 2.6.3. Escalado en tiempo

Consiste en definir, a partir de una función  $x(t)$ , otra función  $y(t)$  tal que  $y(t) = x(at)$ , con  $a$  un número real.

Se tiene que:

- Si  $a > 1$ , tenemos una **compresión** de la señal en el tiempo.
- Si  $a < 1$ , tenemos una **expansión** de la señal en el tiempo.

En ambos casos, la señal resulta distorsionada.

### 2.6.4. Multiplicación por una constante

La multiplicación de una señal por una constante, de la forma  $x(t) \rightarrow y(t) = ax(t)$ , cambia la amplitud de la señal:

- $a > 1$  supone una **amplificación** y
- $a < 1$  supone una **atenuación** de la señal

### 2.6.5. Suma de señales

Se trata simplemente de hacer  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ :

### 2.6.6. Producto de señales

Resulta de  $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ :

## 2.7. Señales periódicas y no periódicas

Usaremos el concepto de *desplazamiento en el tiempo* para definir qué es una **señal periódica**:

Una señal  $x(t)$  es **periódica** de *período*  $T$  si y sólo si:

$$x(t + T) = x(t)$$

Si  $x(t)$  es periódica de período  $T$ , también lo es de período  $mT$ , con  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Es decir, tiene infinitos períodos, de los cuales el más pequeño para el que se cumple  $x(t + T_0) = x(t)$  se denomina *período fundamental*, y es el que suele manejarse.

## 2.8. Señales elementales

### 2.8.1. Pulso rectangular

$$P_1(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

O bien:

$$P_2(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se puede demostrar que  $P_2(t)$  se puede construir:

$$P_2(t) = P_1\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

y  $P_1$ :

$$P_1(t) = P_2\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

### Pulso rectangular discreto

Análogamente:

$$P(n) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

### 2.8.2. Escalón unidad

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Es posible probar que:

$$P_2(t) = A[u(t) - u(t - T)]$$

$$P_1(t) = A \left[ u \left( t + \frac{T}{2} \right) - u \left( t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

#### Escalón unidad discreto

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

### 2.8.3. Señal signo

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Es posible demostrar que:

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

### 2.8.4. Señal rampa

$$r(t) = t \cdot u(t) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Se puede probar que la señal rampa es la integral de un escalón:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) d\tau$$

ya que

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

### 2.8.5. Señal sinc(t)

Se define la función **sinc(t)**<sup>2</sup> como:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

Esta función cuenta con una serie de propiedades:

- El cálculo de  $\text{sinc}(0)$  no es trivial:

$$\text{sinc}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1$$

aplicando la regla de L'Hopital (el límite de un cociente es igual al cociente de los límites).

- Los ceros están equiespaciados a lo largo de su trazado:

$$\text{sinc}(t = k) = \frac{\sin \pi k}{\pi k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

### 2.8.6. Impulso unidad

Sea la señal  $\delta_A(t)$  definida de la siguiente manera:

$$\delta_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} & \text{si } 0 \leq t \leq A \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Si A toma valores cada vez más pequeños, entonces  $\frac{1}{A}$  tomará valores cada vez mayores, puesto que el área de la región debe mantenerse siempre constante e igual a uno. Tendremos, pues, cada vez un pulso más estrecho y alto.

El **impulso unidad** es:

$$\delta(t) = \lim_{A \rightarrow 0} \delta_A(t)$$

que, matemáticamente, se puede describir diciendo que  $\delta(t)$  es una señal que cumple lo siguiente:

- $\delta(0) \rightarrow \infty$
- $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Esta señal *impulso unidad* recibe también el nombre de “Delta de Dirac” (1902-1984).

---

<sup>2</sup>Ver representación gráfica en transparencias.

El concepto de Delta de Dirac nos permite hablar de derivadas de funciones discontinuas. Veámoslo con un ejemplo:

$$u_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{A}t & \text{si } 0 < t < A \\ 1 & \text{si } t > A \end{cases}$$

Se ve fácilmente que

$$\lim_{A \rightarrow 0} u_A(t) = u(t)$$

puesto que si derivamos  $\frac{du_A(t)}{dt}$  obtenemos:

$$\frac{du_A(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{A} & \text{si } 0 < t < A \\ 0 & \text{si } t > A \end{cases}$$

que es justo la señal  $\delta_A(t)$ .

Y ya que

$$\delta_A(t) = \frac{du_A(t)}{dt} \Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow 0} \delta_A(t) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{du_A(t)}{dt}$$

tenemos otra definición del **impulso unidad**, como *derivada del escalón unidad*:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

análogamente,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Se tienen dos propiedades interesantes:

- $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$

- $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

Esto resulta útil en *muestreo de señales*: para quedarnos con el valor de la señal en un instante de tiempo, la multiplicamos por una  $\delta(t)$ .

### Impulso unidad discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Se llama “Delta de Kronecker” (físico alemán, 1823-1891).

### 2.8.7. Señales exponenciales

Son señales de la forma

$$x(t) = ce^{at}$$

donde  $c, a$  pueden ser números reales ó complejos. Distinguiremos varios tipos.

#### Caso 1: Exponenciales reales

En el caso más sencillo,  $c, a \in \mathbb{R}$ :

$$x(t) = ce^{at}$$

#### Caso 2: Exponenciales complejas

Se tiene que  $c = 1$  y  $a = j\omega_0$  (número imaginario puro):

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \underbrace{\cos \omega_0 t}_{\text{parte real}} + \underbrace{j \sin \omega_0 t}_{\text{parte compleja}}$$

Como se puede ver, se depende de un parámetro:

$\omega_0 =$  frecuencia de la exponencial compleja (del seno, del coseno)  
medida en radianes por segundo

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{frecuencia en Hz (ciclos por segundo)}$$

Las señales  $x(t)$  exponenciales complejas son *siempre señales periódicas* de período  $T$ . Veámoslo:

Lo serán, por definición, si

$$x(t + T) = x(t)$$

es decir, si podemos demostrar que

$$x(t + T) = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} = x(t)$$

lo cual será posible si

$$e^{j\omega_0 T} = 1 ; e^{j\omega_0 T} = 1 = \cos 2\pi k + j \sin 2\pi k = 1 \cdot e^{j2\pi k} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

pues entonces

$$j\omega_0 T = j2\pi k$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} k} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Éste es el **período fundamental** de una señal compleja  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ .

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{f_0}$$

A mayor frecuencia, menor período (señal “más apretada”)<sup>3</sup>.

### Caso 3: Exponenciales complejas<sub>2</sub>

Se tiene que  $c$  es un número complejo de módulo  $|c|$  y fase  $e^{j\phi}$ ,  $c = |c|e^{j\phi}$  y  $a$  es un número imaginario puro,  $a = j\omega_0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= |c|e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} = |c|e^{j(\omega_0 t + \phi)} = \\ &= |c| \cos(\omega_0 t + \phi) + j|c| \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

donde  $|c| =$  **Amplitud**, que modifica la de la sinusoide<sup>4</sup>  
y  $\phi =$  **Fase** (desplazamiento).

<sup>3</sup>Frecuencias bajas  $\rightarrow$  sonidos graves.

<sup>4</sup>Sus unidades son las de la magnitud que está representada por la señal.

**Caso 4: Exponenciales complejas<sub>3</sub>**

Por último, nos queda analizar cuando  $c = |c|e^{j\phi}$  y  $a = r + j\omega_0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= |c|e^{j\phi}e^{r+j\omega_0 t} = |c|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \phi)} = \\ &= |c|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \phi) + |c|e^{rt}j\sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Los parámetros  $\omega_0$  y  $\phi$  influyen de la manera que ya hemos visto.

**2.9. Concepto de sistema**

Como ya ha sido comentado, llamaremos **sistema** a todo aquello que implique una transformación más o menos compleja de señales, y lo consideraremos una “caja negra”:

$$x(t) \quad \circ - \boxed{\text{T}[\cdot]} - \circ \quad y(t) = \text{T}[x(t)]$$

Ejemplo:

$$y(t) = t(x(t-1)) + x^3(t)$$

Un **sistema continuo** es aquél al que se le proporciona como entrada una señal continua y produce una señal continua a la salida.

$$x(t) \quad \Rightarrow \quad \circ - \boxed{\text{T}[\cdot]} - \circ \quad y(t) = \text{T}[x(t)]$$

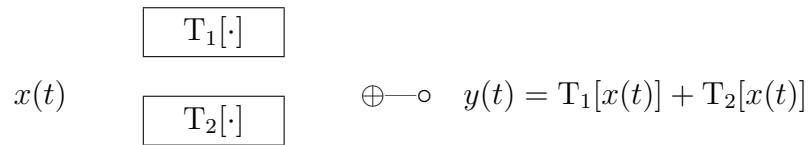
La definición de **sistema discreto** es totalmente análoga.

$$x(n) \quad \Rightarrow \quad \circ - \boxed{\text{T}[\cdot]} - \circ \quad y(n) = \text{T}[x(n)]$$

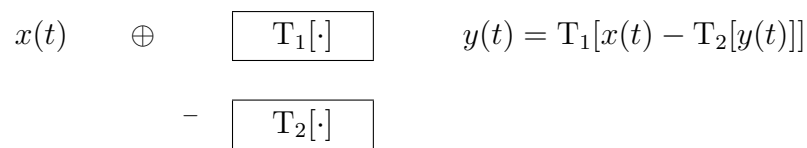
**2.10. Interconexión de sistemas****2.10.1. Interconexión de sistemas en Serie**

$$\begin{aligned} x(t) \quad \circ - \boxed{\text{T}_1[\cdot]} - \boxed{\text{T}_2[\cdot]} - \circ \quad z(t) &= \text{T}_2[y(t)] = \text{T}_2[\text{T}_1[x(t)]] \\ \searrow \quad y(t) &= \text{T}_1[x(t)] \end{aligned}$$

### 2.10.2. Interconexión de sistemas en Paralelo



### 2.10.3. Interconexión Realimentada de sistemas



El problema de las interconexiones realimentadas es que **pueden volverse inestables**.

## 2.11. Propiedades de los sistemas

### 2.11.1. Memoria

Se dice que un sistema **no tiene memoria** cuando la *salida* en un determinado instante sólo *depende de la entrada en ese mismo instante*, y no de la entrada en instantes anteriores o posteriores al presente.

En caso contrario, diremos que sí la tiene.

Ejemplos:

Son sistemas sin memoria:

$$y(t) = ax(t)$$

$$y(t) = tx(t) + bx^3(t)$$

Son sistemas con memoria:

$$y(t) = x(t) + 3x(t-1) \text{ ya que } y(0) = x(0) + 3x(-1)$$

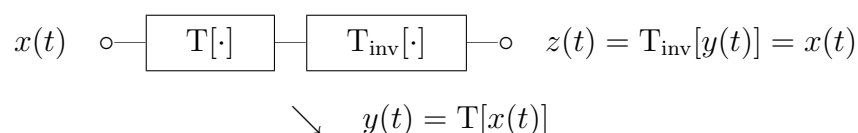
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \text{ (memoria infinita)}$$

### 2.11.2. Invertibilidad

Un sistema se dice **invertible** si a partir de la *salida podemos obtener la entrada* de nuevo. Más formalmente, se dice que un sistema es invertible *si y sólo si dos entradas distintas corresponden a dos salidas distintas*:

$$x_1(t) \neq x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad y_1(t) \neq y_2(t)$$

Un sistema de estas características se puede invertir mediante otro sistema conectado en serie.



Ejemplos:

Son sistemas invertibles:

$$y(t) = x(t - t_0) \longrightarrow z(t) = y(t + t_0)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longrightarrow z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

No invertibles:

$$y(t) = x^2(t) \longrightarrow x(t) \text{ y } x(-t) \text{ dan la misma salida}$$

### 2.11.3. Causalidad

Un sistema **causal** es un sistema en que la señal de *salida* en un determinado instante *sólo depende del presente y del pasado* de la señal, no del futuro ni de instantes posteriores. También se les denomina sistemas **no anticipativos**.

Todos los sistemas sin memoria son sistemas causales. El recíproco no es cierto.

Ejemplos:

Son sistemas causales:

$$y(n) = x(n) - x(n - 1)$$

$$y(n) = ax(n)$$

No causales:

$$y(n) = x(n) + 3x(n + 4) \text{ ya que } y(0) = x(0) + 3x(4)$$

$$y(n) = x(2n) \text{ ya que } y(1) = x(2)$$

$$y(n) = x(-n) \text{ ya que } y(-1) = x(1)$$

Podríamos plantearnos si en realidad existen los sistemas no causales, puesto que en la naturaleza no los encontramos. Pero sí lo hacemos en sistemas de procesamiento de imágenes, sonido, ... donde pierde sentido la noción de pasado/futuro. Desde luego, no será nada que funcione en tiempo real.

### 2.11.4. Estabilidad

El concepto de **estabilidad** es un concepto muy importante. Un sistema es **estable** si y sólo si cuando tenemos una *entrada acotada*, la *salida* es también siempre *acotada*:

$$|x(t)| < M_x \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < M_y \quad \text{con } M_x, M_y \text{ constantes}$$

Ejemplo de sistema no estable:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Sea la entrada  $x(t) = u(t)$ , señal acotada que nunca vale más de 1.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} t < 0 & \int_{-\infty}^t 0 d\tau = 0 \\ t > 0 & \int_0^t 1 d\tau = t \end{cases} \Rightarrow = t \cdot u(t)$$

### 2.11.5. Invarianza en el tiempo

Dado el sistema

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \circ\text{---} \boxed{\text{T}[\cdot]} \text{---}\circ & y(t) = \text{T}[x(t)] \\ x(t - t_0) & & y(t - t_0) = \text{T}[x(t - t_0)] \end{array}$$

es **invariante en el tiempo**.

Es decir, el sistema se comporta siempre igual, ante el mismo valor de la entrada, sea cual sea el instante del tiempo en que sea introducida, produce siempre el mismo valor de salida. Esto debe cumplirse  $\forall t_0$  y  $\forall x(t)$ .

Ejemplos:

Son sistemas invariantes:

$$\begin{array}{l} y(t) = x(t) - x(t - 1) \text{ pues } x(t - t_0) \text{ produce como salida} \\ x(t - t_0) - x(t - t_0 - 1) \text{ e } y(t - t_0) \text{ es igual a } x(t - t_0) - x(t - t_0 - 1). \end{array}$$

No invariante:

$$\begin{array}{l} y(t) = tx(t), \text{ ya que } x(t - t_0) \text{ produce } tx(t - t_0), \text{ mientras que} \\ y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0)^5. \end{array}$$

### 2.11.6. Linealidad

También la **linealidad** es una propiedad muy importante. Dadas dos señales

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \text{T}[x_1(t)]$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \text{T}[x_2(t)]$$

Un sistema es **lineal** si se cumple:

1.  $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$ , es decir, si proporcionamos como entrada la suma de dos señales, obtenemos como salida la suma de las señales de salida:

$$\text{T}[x_1(t) + x_2(t)] = \text{T}[x_1(t)] + \text{T}[x_2(t)]$$

---

<sup>5</sup>Con detalle:  $x(t) \rightarrow tx(t) = y(t)$        $z(t) = x(t - t_0) \rightarrow tz(t) = y(t)$        $tx(t - t_0) = y(t)$ .

2.  $ax_1(t) \longrightarrow ay_1(t)$ , o sea, que si a la entrada tenemos una señal multiplicada por una constante, a la salida se nos proporciona la salida a la señal, multiplicada por la misma constante:

$$\mathbb{T}[ax_1(t)] = a\mathbb{T}[x_1(t)]$$

Estas dos condiciones puede agruparse en una sola: si a la entrada tenemos una combinación lineal de dos señales, a la salida se tiene la misma combinación lineal de sus salidas.

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \longrightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

$$\mathbb{T}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1\mathbb{T}[x_1(t)] + a_2\mathbb{T}[x_2(t)]$$

Por inducción se puede demostrar que si se cumple para dos señales, se cumple para un número arbitrario de señales:

$$\sum_{k=1}^M a_k x_k(t) \longrightarrow \sum_{k=1}^M a_k y_k(t)$$

$$\mathbb{T}\left[\sum_{k=1}^M a_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^M a_k \mathbb{T}[x_k(t)]$$

Ejemplos:

Es lineal:

$$y(t) = tx(t)$$

No es lineal:

$$y(t) = x^2(t)$$

A partir de ahora trataremos con sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Su análisis y diseño es más fácil, y sus propiedades se describen matemáticamente con gran precisión.

## Capítulo 3

# Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

En el tema anterior definimos lo que se entiende por *sistema invariante en el tiempo* y *sistema lineal en el tiempo*:

**Invarianza en el tiempo:**

$$\begin{array}{ccc} x(n) & \circ\text{---} \boxed{\text{T}[\cdot]} \text{---}\circ & y(n) = \text{T}[x(n)] \\ x(n-k) & & y(n-k) = \text{T}[x(n-k)] \end{array}$$

**Linealidad:**

$$x(n) = \sum_k a_k x_k(n) \quad \circ\text{---} \boxed{\text{T}[\cdot]} \text{---}\circ \quad y(n) = \sum_k a_k y_k(n)$$

$$\text{T}\left[\sum_k a_k x_k(n)\right] = \sum_k a_k \text{T}[x_k(n)]$$

Llamaremos **LTI** (*Linear Time Invariant*) a los sistemas que cumplan estas dos características, que serán los que trataremos<sup>1</sup>.

### 3.1. Representación de una señal en términos de impulsos

Sea la señal:

---

<sup>1</sup>Un sistema no lineal si lo estudiamos en un intervalo pequeño puede ajustarse muy bien a un modelo lineal.

Se puede escribir:

Analíticamente,

$$x(n) = x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) = \sum_{k=-1}^2 x(k)\delta(n-k)$$

En general, cualquier señal se puede expresar:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Esto se puede ver como una combinación lineal si asimilamos  $x_k \cong a_k$  y  $\delta(n-k) \cong x_k(n)$ .

$$x(n) \quad \circ \text{---} \boxed{LTI} \text{---} \circ \quad y(n) = \mathbb{T}[x(n)]$$

$$y(n) = \mathbb{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathbb{T}[\delta(n-k)]$$

## 3.2. Respuesta al impulso y suma de convolución

Definimos la **respuesta al impulso** como la salida obtenida en un sistema LTI al proporcionarle como entrada la señal impulso unidad,  $\delta(n)$ :

$$\delta(n) \quad \circ \text{---} \boxed{LTI} \text{---} \circ \quad h(n) = \mathbb{T}[\delta(n)]$$

Por la invarianza en el tiempo:

$$\begin{array}{ccc} \delta(n) & \circ \text{---} \boxed{LTI} \text{---} \circ & h(n) = \mathbb{T}[\delta(n)] \\ \delta(n-1) & & h(n-1) = \mathbb{T}[\delta(n-1)] \\ \vdots & & \vdots \\ \delta(n-k) & & h(n-k) = \mathbb{T}[\delta(n-k)] \end{array}$$

Así, definimos la **suma de convolución**:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \mathbf{x}(\mathbf{n}) * \mathbf{h}(\mathbf{n})$$

A partir de ahora caracterizaremos:

$$x(n) \quad \circ \text{---} \boxed{h(n)} \text{---} \circ \quad y(n) = x(n) * h(n)$$

Un sistema LTI queda *totalmente caracterizado* por su respuesta al impulso,  $h(n)$ .

### Cálculo de $y(n_0)$

El cálculo de una convolución no es nada evidente; se deben seguir cuidadosamente los siguientes pasos:

PASO 1: Construir  $x(k)$ .

PASO 2: Construir  $h(-k)$ .

PASO 3: Desplazar  $h(-k)$  el valor  $n_0$ . Haremos  $h(-(k-n_0))$  para lograr  $h(n_0-k)$ , recordando que  $n_0 > 0 \Rightarrow$  desplazamiento a la derecha y  $n_0 < 0 \Rightarrow$  desplazamiento a la izquierda.

PASO 4: Multiplicar  $x(k) \cdot h(n_0-k) = v_{n_0}(k)$ .

PASO 5: Sumar  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{n_0}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n_0-k) = \mathbf{y}(\mathbf{n}_0)$ .

## 3.3. Integral de convolución

Lo que acabamos de ver puede extenderse al **caso continuo**, aunque no lo demostraremos porque matemáticamente es mucho más complicado. De todos modos, conceptualmente es la generalización del caso discreto:

- (1) Una señal  $x(t)$  se puede expresar en términos del impulso unidad<sup>2</sup>:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- (2) Un sistema LTI queda *totalmente caracterizado* por su respuesta al impulso:

$$h(t) = \mathbb{T}[\delta(t)]$$

- (3) La salida  $y(t)$  se puede calcular a partir de  $x(t)$  y  $h(t)$  mediante la **integral de convolución**:

$$y(t) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) * \mathbf{h}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

<sup>2</sup>La principal diferencia entre el caso continuo y el discreto es la sustitución del sumatorio por la integral.

**Cálculo de  $y(t)$** 

Los pasos en el cálculo de la convolución son los ya conocidos:

PASO 1: Construir  $x(\tau)$ .

PASO 2: Construir  $h(-\tau)$ .

PASO 3: Hallar  $h(t-\tau) = h(-(\tau-t))$ . Si  $t > 0$ , tendremos un desplazamiento a la derecha y si  $t < 0$ , un desplazamiento a la izquierda.

PASO 4: Obtener la señal producto  $\mathbf{v}_t(\tau) = x(\tau) \cdot h(t-\tau)$ .

PASO 5: Calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} v_t(\tau) d\tau = \mathbf{y}(t)$ .

**NOTA**

La función integral de una función discontinua es una función continua.

Este es un buen método para comprobar si el resultado de una convolución puede ser correcto o no (salvo si aparecen  $\delta$  por el medio). Recordemos que una posible definición de *convolución* es la operación que se realiza con la entrada de un LTI para obtener su salida.

**3.4. Propiedades de la convolución****3.4.1. Conmutativa**

$$\mathbf{x}(t) * \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{x}(t)$$

**DEMOSTRACIÓN**

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \underbrace{\left. \begin{array}{l} t - \tau = a \Rightarrow \tau = t - a \\ d\tau = -da \\ \tau = -\infty \Rightarrow a = \infty \\ \tau = \infty \Rightarrow a = -\infty \end{array} \right\}}_{\text{cambio de variable}} \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} x(t-a) h(a) (-da) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a) h(a) da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

**CONSECUENCIAS**

Son equivalentes:

$$\begin{array}{l} x(t) \quad \circ \text{---} \boxed{h(t)} \text{---} \circ \quad y(t) = x(t) * h(t) \\ h(t) \quad \circ \text{---} \boxed{x(t)} \text{---} \circ \quad y(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

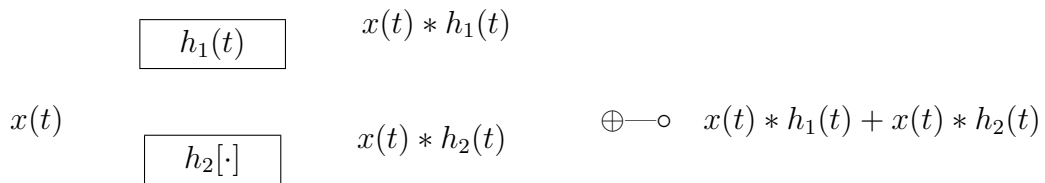
### 3.4.2. Distributiva respecto de la suma

$$\boxed{\mathbf{x}(t) * [\mathbf{h}_1(t) + \mathbf{h}_2(t)] = \mathbf{x}(t) * \mathbf{h}_1(t) + \mathbf{x}(t) * \mathbf{h}_2(t)}$$

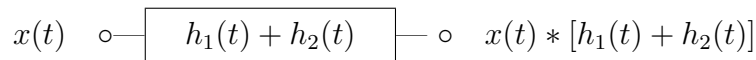
DEMOSTRACIÓN

La demostración es muy sencilla<sup>3</sup>.

CONSECUENCIAS



Esto significa que este sistema (dos conectados en paralelo) equivale a:

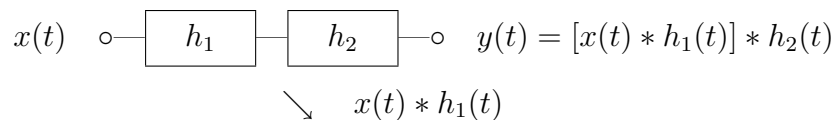


### 3.4.3. Asociativa

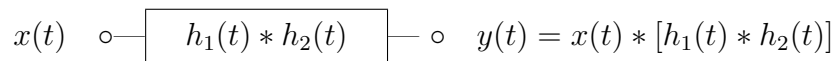
$$\boxed{[\mathbf{x}(t) * \mathbf{h}_1(t)] * \mathbf{h}_2(t) = \mathbf{x}(t) * [\mathbf{h}_1(t) * \mathbf{h}_2(t)]}$$

CONSECUENCIAS

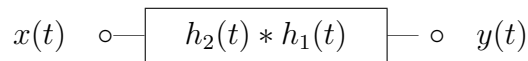
El sistema:



Equivale a:



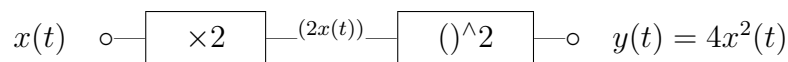
Más aún, también equivale a:



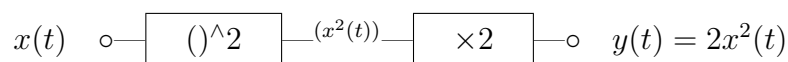
Y también a:



Es decir, el orden en que se interconectan dos LTI es irrelevante. Es importante recordar que esto no se verifica en general, véase el contraejemplo:



No es lo mismo que



<sup>3</sup>Ver hojas de demostraciones.

### 3.4.4. Elemento unitario

El elemento unitario para la operación de convolución es  $\delta(t)$ :

$$\delta(\mathbf{t}) * \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) * \delta(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

### 3.4.5. Elemento neutro

El elemento neutro para la operación de convolución es  $x(t) = 0 \quad \forall t$ :

$$\mathbf{0} * \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

## 3.5. Propiedades de los sistemas LTI

### 3.5.1. Invertibilidad

Si un sistema LTI es **invertible**, su inverso también es LTI:

$$x(t) \circ \boxed{h(t)} \circ \boxed{h_{\text{inv}}(t)} \circ z(t) = x(t)$$

$$\searrow y(t)$$

Equivale a:

$$x(t) \circ \boxed{h_1(t) * h_{\text{inv}}(t)} \circ z(t) = x(t) = x(t) * \delta(t)$$

ya que, como hemos visto,  $\delta(t)$  es el *elemento unitario* para la operación de convolución.

La *condición de invertibilidad* se expresa:

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}) * \mathbf{h}_{\text{inv}}(\mathbf{t}) = \delta(\mathbf{t})$$

CASO DISCRETO:

$$h(n) * h_{\text{inv}}(n) = \delta(n)$$

### 3.5.2. Causalidad

Sea un sistema LTI discreto:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) =$$

$$= \underbrace{h(-\infty)x(n+\infty) + h(-\infty+1)x(n+\infty-1) + \dots + h(-1)x(n+1)}_{\text{futuro}} +$$

$$+ \underbrace{h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(\infty-1)x(n-\infty+1) + h(\infty)x(n-\infty)}_{\text{pasado}}$$

presente

El sistema será **causal**  $\Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$  para  $k < 0$ , ya que de esta manera se anulan todos los términos que hacen referencia al “futuro” de la señal y sólo influyen el presente y el pasado.

CASO CONTINUO:

Sistema causal  $\Leftrightarrow h(t) = 0 \quad t < 0$ .

Ejemplo:

### 3.5.3. Memoria

Para que un sistema no tenga **memoria**, deben anularse también los valores que asociamos al pasado en la fórmula anterior, es decir:

Sistema sin memoria  $\Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{k}) = \mathbf{0} \quad k \neq 0$

Por tanto nos queda una expresión:

$$\boxed{h(n) = A\delta(n)}$$

De modo que la salida es:

$$y(n) = x(n) * A\delta(n) = Ax(n)$$

CASO CONTINUO:

Sistema sin memoria  $\Leftrightarrow h(t) = A\delta(t)$

$$y(t) = x(t) * A\delta(t) = Ax(t)$$

Los sistemas sin memoria son muy triviales, sólo modifican la amplitud de la señal de entrada. Los interesantes son los sistemas que tienen memoria.

### 3.5.4. Estabilidad

Un sistema LTI es **estable**  $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ .

CASO CONTINUO:

Un sistema LTI es **estable**  $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ .

Ejemplo:

Veamos que un sistema que produce una salida  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$  es un LTI *inestable*:

$$\begin{aligned}h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t) &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^{\infty} 1dt = [t]_0^{\infty} = \infty\end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Análisis Fourier de señales y sistemas continuos

### 4.1. Respuesta en frecuencia de un sistema LTI

La respuesta de un LTI ante una entrada exponencial compleja es una constante multiplicada por la propia señal de entrada:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad \circ \text{---} \boxed{\text{LTI}} \text{---} \circ \quad y(t) = \text{cte} \cdot e^{j\omega_0 t} = \text{cte} \cdot x(t)$$

Esto es una propiedad exclusiva de los LTI, y es la base de todo el análisis de Fourier<sup>1</sup>.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega_0 \tau}d\tau = e^{j\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0 \tau}d\tau}_{H(\omega_0)} \end{aligned}$$

El término que denominamos  $H(\omega_0)$ , aunque depende de la frecuencia ( $\omega$ ), es constante para cada caso.

CONCLUSIÓN

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad \circ \text{---} \boxed{h(t)} \text{---} \circ \quad y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

donde

$$\boxed{H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt}$$

y que recibe el nombre de **respuesta en frecuencia** del sistema LTI.

En general,  $H(\omega)$  es un número complejo que depende de  $\omega$ :

---

<sup>1</sup>Jean Baptiste Fourier (1768-1830.)

$$H(\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

$$y(t) = |H(\omega)| e^{j(\omega t + \angle H(\omega))}$$

Estos sistemas se llaman también *filtros*, porque para determinadas frecuencias  $\omega$ ,  $H(\omega)$  se puede hacer cero, y así “no dejarla pasar” (no aparecer a la salida), es decir:

$$y(t) = e^{j\omega t} = x(t)$$

## 4.2. Concepto de Transformada de Fourier

<sup>2</sup> Sea  $x(t)$ ; su TF es:

$$\mathbb{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \mathbf{TF}[x(t)]$$

A veces también se llama *integral de Fourier*, *ecuación de análisis de la transformada de Fourier* y se dice que  $\mathbb{X}(\omega)$  es el *espectro* de  $x(t)$ .

La TF inversa permite recuperar  $x(t)$  a partir de  $\mathbb{X}(\omega)$ :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathbf{TF}^{-1}[\mathbb{X}(\omega)]$$

Esta expresión se conoce como *ecuación de síntesis de la TF*, es la representación en el dominio del tiempo de  $\mathbb{X}(\omega)$  (la anterior es en el dominio de la frecuencia).

## 4.3. Respuesta de un sistema LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas

Sea ahora la señal de entrada a un LTI:

$$x(t) = a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}$$

La salida que se obtendrá será:

$$y(t) = \mathbf{T}[x(t)] = \mathbf{T}[a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}]$$

aplicando la linealidad:

$$= \mathbf{T}[a_1 e^{j\omega_1 t}] + \mathbf{T}[a_2 e^{j\omega_2 t}] = a_1 \mathbf{T}[e^{j\omega_1 t}] + a_2 \mathbf{T}[e^{j\omega_2 t}]$$

$$= a_1 (H(\omega_1) e^{j\omega_1 t}) + a_2 (H(\omega_2) e^{j\omega_2 t})$$

En general:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t} \quad \circ \text{---} \boxed{\text{LTI}} \text{---} \circ \quad y(t) = \sum_k a_k H(\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

---

<sup>2</sup>Lo abreviaremos TF.

## 4.4. Propiedades de la convolución

Hagamos un repaso de lo que hemos visto hasta ahora:

$$x(t) \quad \circ \text{---} \boxed{\text{LTI}} \text{---} \circ \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$\mathbb{X}(\omega) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$H(\omega) = \text{TF}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(\omega) = \text{TF}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$$

Desarrollando esta última expresión se tiene:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right]}_{y(t)} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)e^{-j\omega t} d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \begin{array}{l} t - \tau = a \Rightarrow t = a + \tau \\ dt = da \quad (\tau = \text{cte.}) \\ t = -\infty \Rightarrow a = -\infty \\ t = \infty \Rightarrow a = \infty \end{array} \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(a)e^{-j\omega(a+\tau)} da \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(a)e^{-j\omega a} da \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ e^{-j\omega\tau} \cdot H(\omega) \right] d\tau = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \boxed{H(\omega) \cdot \mathbb{X}(\omega)} \end{aligned}$$

Tiempo

Frecuencia

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \xrightarrow{\text{TF}} \quad Y(\omega) = \mathbb{X}(\omega) \cdot H(\omega)$$

## 4.5. Consideraciones matemáticas de la TF

### 4.5.1. Unicidad

Se garantiza que a cada señal le corresponde una y sólo una Transformada de Fourier (y viceversa):

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega)$$

### 4.5.2. Convergencia

Se tienen tres *condiciones suficientes*<sup>3</sup> para garantizar que existe la TF, conocidas como **Condiciones de Dirichlet** (1805-1859). Han de verificarse las tres:

1.  $x(t)$  ha de ser *absolutamente integrable*, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2.  $x(t)$  debe tener un *número finito de máximos y mínimos* en un intervalo finito.
3.  $x(t)$  debe tener un *número finito de discontinuidades* en un intervalo finito.

## 4.6. TF de algunas señales básicas

### 4.6.1. Exponencial decreciente

Se trata de la señal  $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$a > 0 \Rightarrow \text{decreciente}$$

Su TF se calcula:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-(a+j\omega)} (e^{-\infty} - 1) = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Además, si  $a < 0$  no existe la TF.

$x(t) = e^{-at}u(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$
---

<sup>3</sup>No necesarias.

Si aplicamos que  $z = a + jb = |z|e^{j\omega}$  entonces lo podemos escribir de esta otra forma:

$$\mathbb{X}(\omega) = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\sqrt{a^2 + \omega^2} e^{j \arctan \frac{\omega}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega}{a}} = \left| \begin{array}{l} |\mathbb{X}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \angle \mathbb{X}(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a} \end{array} \right.$$

### 4.6.2. Exponencial bilateral

Es la señal  $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{at} & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$

$$a > 0 \Rightarrow \text{decreciente}$$

Su TF:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \left. \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \right]_{-\infty}^0 + \left. \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-j\omega} (1 - e^{-\infty}) + \frac{1}{-(a+j\omega)} (e^{-\infty} - 1) \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a+j\omega + a-j\omega}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \boxed{\frac{2a}{a^2 + \omega^2}} \end{aligned}$$

De nuevo si  $a < 0$  no existe la TF.

### 4.6.3. Pulso rectangular

Un pulso rectangular se representa  $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Se calcula su TF:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T \\ &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}) = \frac{2}{\omega} \frac{1}{2j} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega} = \boxed{2T \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega T}{\pi} \right)} \end{aligned}$$

donde  $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$  (4).

### TF inversa de un pulso rectangular

Cuando en frecuencia tenemos la señal  $\mathbb{X}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

FILTRO PASO BAJO IDEAL

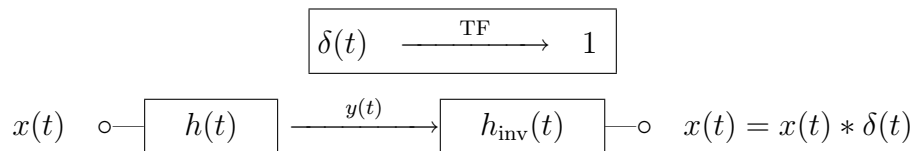
Su TF resulta:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-W}^W \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jt} (e^{jWt} - e^{-jWt}) = \frac{1}{\pi t} \frac{1}{2j} (e^{jWt} - e^{-jWt}) = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \boxed{\frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \left( \frac{Wt}{\pi} \right)} \end{aligned}$$

#### 4.6.4. Impulso unidad $\delta(t)$

Aplicando la definición calculamos su TF:

$$TF[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



$$h(t) * h_{\text{inv}} = \delta(t)$$

$$TF[h(t) * h_{\text{inv}}] = TF[\delta(t)]$$

En frecuencia:

$$H(\omega) \cdot H_{\text{inv}}(\omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad H_{\text{inv}}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$$

Es decir, el sistema inverso compensa la respuesta en tiempo (recíprocamente, en frecuencia); debido a esto recibe el nombre de **ecualizador**.

---

<sup>4</sup>Ver transparencias.

## 4.7. Propiedades de la TF

Veremos ahora una serie de propiedades de la Transformada de Fourier que nos simplifican su cálculo. Por tanto, las utilizaremos siempre que nos sea posible.

### 4.7.1. Linealidad

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}_1(\omega) \\ x_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}_2(\omega) \end{array} \right\} a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} a_1\mathbb{X}_1(\omega) + a_2\mathbb{X}_2(\omega)$$

### 4.7.2. Inversión en tiempo

$$\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) \\ x(-t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(-\omega) \end{array}$$

El cálculo se realiza:

$$\begin{aligned} TF[x(-t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt = \left| \begin{array}{l} -t = \tau \Rightarrow t = -\tau \\ dt = -d\tau \\ t = -\infty \Rightarrow \tau = \infty \\ t = \infty \Rightarrow \tau = -\infty \end{array} \right| \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{j\omega t}(-d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = \mathbb{X}(-\omega) \end{aligned}$$

### 4.7.3. Conjugación en tiempo

$$\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) \\ x^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}^*(-\omega) \end{array}$$

5

#### CONSECUENCIAS

- (a) Si  $x(t)$  es real  $\Rightarrow$  el módulo de  $\mathbb{X}(\omega)$  es simétrico y su fase antisimétrica. Se demuestra:

$$\begin{aligned} \text{Si } x(t) \text{ es real } &\Rightarrow x(t) = x^*(t) \text{ (no hay parte imaginaria)} \Rightarrow \mathbb{X}(\omega) = \\ &\mathbb{X}^*(-\omega) \Rightarrow |\mathbb{X}(\omega)|e^{j\angle\mathbb{X}(\omega)} = |\mathbb{X}(-\omega)|e^{-j\angle\mathbb{X}(-\omega)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{X}(\omega)| = |\mathbb{X}(-\omega)| \equiv \text{simétrico} \\ \angle\mathbb{X}(\omega) = -\angle\mathbb{X}(-\omega) \equiv \text{antisimétrico} \end{cases} \end{aligned}$$

De modo que para señales reales, con conocer la mitad de la TF nos es suficiente para conocerla toda.

- (b) Si  $x(t)$  es real y simétrica  $\Rightarrow \mathbb{X}(\omega)$  es real y simétrica. Se demuestra:

<sup>5</sup>La demostración es sencilla y se deja como ejercicio.

Si  $x(t)$  es real  $\Rightarrow x(t) = x^*(t) \Rightarrow \mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}^*(-\omega)$ .

Si  $x(t)$  es simétrica  $\Rightarrow x(t) = x(-t) \Rightarrow \mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}(-\omega) \Rightarrow \mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}^*(-\omega)$ .

De donde como  $\mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}^*(\omega) \Rightarrow \mathbb{X}(\omega)$  es real, y como  $\mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}(-\omega) \Rightarrow \mathbb{X}(\omega)$  es simétrica.

#### 4.7.4. Desplazamiento en tiempo

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = |\mathbb{X}(\omega)|e^{j\angle\mathbb{X}(\omega)} \\ x(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega)e^{-j\omega t_0} = |\mathbb{X}(\omega)|e^{j\angle\mathbb{X}(\omega)}e^{-j\omega t_0} = |\mathbb{X}(\omega)|e^{j(\angle\mathbb{X}(\omega) - \omega t_0)} \end{aligned}$$

Es decir, un desplazamiento en tiempo significa o se traduce en multiplicar por una exponencial<sup>6</sup>. Por tanto, no se modifica su módulo, sino sólo su fase.

#### 4.7.5. Escalado en tiempo

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) \\ x(at) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} \mathbb{X}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Esta propiedad es la que demuestra que una compresión en tiempo expande en frecuencia y viceversa<sup>7</sup>:

- Si  $a > 1 \Rightarrow x(at)$  comprime en tiempo  $\Rightarrow \mathbb{X}\left(\frac{\omega}{a}\right)$  expande en frecuencia.
- Si  $a < 1 \Rightarrow x(at)$  expande en tiempo  $\Rightarrow \mathbb{X}\left(\frac{\omega}{a}\right)$  comprime en frecuencia.

#### 4.7.6. Derivación en tiempo

Se cumple que:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\xrightarrow{\text{TF}} j\omega\mathbb{X}(\omega) \end{aligned}$$

#### 4.7.7. Integración en tiempo

Se verifica:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{j\omega}\mathbb{X}(\omega) + \pi\mathbb{X}(0)\delta(\omega)$$

<sup>6</sup>La demostración se propone como ejercicio.

<sup>7</sup>La posición y velocidad de las partículas está relacionada por la TF (Principio de Incertidumbre de Heisenberg).

## 4.8. Relación de Parseval

La **relación de Parseval** nos permite calcular la *energía* de una señal mediante la fórmula:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{X}(\omega)|^2 d\omega$$

### 4.8.1. Densidad espectral de energía

De la relación anterior se sigue la siguiente, que nos sirve para conocer cómo se distribuye la energía a través de las frecuencias, indicando en qué frecuencias está concentrada la energía de una señal (en aquéllas en que el módulo es mayor, obviamente):

$$\psi_x(\omega) = |\mathbb{X}(\omega)|^2 = \mathbb{X}(\omega) \cdot \mathbb{X}^*(\omega)$$

Sus unidades son *julios/Hz*.

Así, el *teorema de Parseval* se puede escribir como:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

### Propiedades de la DEE

a) Siempre es real y positiva:

$$\psi_x(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \quad (\text{se deduce de la propia definición})$$

b) Si  $x(t)$  es real, entonces  $\psi_x(\omega)$  es simétrica<sup>8</sup>:

$$x(t) \text{ real} \Rightarrow \psi_x(\omega) = \psi_x(-\omega)$$

c) La relación Entrada-Salida en un sistema LTI es<sup>9</sup>:

$$x(t) \leftrightarrow \psi_x(\omega) \quad \circ \text{---} \boxed{h(t)} \text{---} \circ \quad y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow \psi_y(\omega) = \psi_x(\omega) |H(\omega)|^2$$

## 4.9. Función de Autocorrelación

La **Función de Autocorrelación** es la TF inversa de la DEE:

$$R_x(t) = TF^{-1}[\psi_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Utilizando los conocimientos que ya tenemos...

$$\begin{aligned} \psi_x(\omega) &= \mathbb{X}(\omega) \cdot \mathbb{X}^*(\omega) \\ TF^{-1}[\mathbb{X}(\omega)] &= x(t) & TF[x(t) * x^*(t)] &= \mathbb{X}(\omega) \cdot \mathbb{X}^*(\omega) = \psi_x(\omega) \\ TF^{-1}[\mathbb{X}^*(\omega)] &= x^*(-t) \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Se deja la demostración como ejercicio.

<sup>9</sup>Se deja la demostración como ejercicio.

Se concluye:

$$\boxed{\mathbf{R}_x = x(t) * x^*(-t)}$$

También se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(t) &= x(t) * x^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \left| \begin{array}{l} -\tau = a \Rightarrow \tau = -a \\ d\tau = -da \\ \tau = -\infty \Rightarrow a = \infty \\ \tau = \infty \Rightarrow a = -\infty \end{array} \right| \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} x^*(a)x(t+a)(-da) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(a)x(t+a)da \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

en lo que puede ser una tercera definición.

Si  $x(t)$  es real,  $x(t) = x^*(t)$  y se simplifica todo bastante:

$$\mathbf{R}_x(t) = x(t) * x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

#### 4.9.1. Propiedades de la F.A.

- a) En el origen ( $t = 0$ ) toma el valor de la energía de la señal: *la autocorrelación en el origen es la energía.*

$$\begin{aligned} R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau &\Rightarrow R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = E_x \\ &\text{(por definición)} \end{aligned}$$

- b) Se cumple también (la demostración se deja como ejercicio) que:

$$R_x(t) = R_x^*(-t)$$

Si  $x(t)$  es real  $\Rightarrow x(t) = x^*(t) \Rightarrow R_x(t) = R_x(-t) \Rightarrow$  simétrica.

- c) El máximo de  $R_x(t)$  siempre ocurre en  $t = 0$ . Se demuestra aplicando la *desigualdad de Cauchy-Schuartz*, que afirma:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)x_2(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt$$

Aplicado aquí:

$$|R_x(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t-\tau)d\tau \right|^2 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau}_{E_x} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)|^2 d\tau}_{E_x \text{ con c. de var. } a=t+\tau}$$

Así,

$$|R_x(t)|^2 \leq E_x^2 \quad \Rightarrow \quad |R_x(t)| \leq E_x = R_x(0) \text{ (máximo absoluto)}$$

d) La relación Entrada-Salida en un sistema LTI<sup>10</sup>:

$$x(t) \leftrightarrow R_x(t) \quad \circ \text{---} \boxed{h(t)} \text{---} \circ \quad y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow R_y(t) = R_x(t) * R_h(t)$$

donde  $R_h(t) = h(t) * h^*(-t)$ .

## 4.10. Dualidad de la T.F.

Recordemos las ecuaciones:

$$\text{Ecuación de análisis} \quad \mathbb{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Ecuación de síntesis} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Como ya pudimos apreciar en su momento, la similitud es patente. Veamos unos cuantos ejemplos de esta dualidad:

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-at}u(t) & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \\ ? & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = e^{-a\omega}u(\omega) \\ ? & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega}u(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-a\omega}e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a-jt)\omega} d\omega \\ & = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-(a-jt)} e^{-(a-jt)\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-(a-jt)} (0 - 1) \\ & = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a-jt} \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Se deja la demostración como ejercicio.

## EJEMPLO 2

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{-a|t|} & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\
 x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a^2 + t^2} & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = e^{-a|\omega|}
 \end{aligned}$$

## EJEMPLO 3

$$\xrightarrow{\text{TF}} \frac{2 \sin A\omega}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{\sin At}{\pi t} \xrightarrow{\text{TF}}$$

## EJEMPLO 4

$$\begin{aligned}
 x(t) = \delta(t) & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = 1 \\
 x(t) = \frac{1}{2\pi} & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = \delta(\omega) \\
 x(t) = 1 & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)
 \end{aligned}$$

**4.10.1. Propiedades duales**

a) Conjugación en frecuencia:

$$\begin{aligned}
 x(t) & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) \\
 x^*(-t) & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}^*(\omega)
 \end{aligned}$$

b) Derivación en frecuencia:

$$\begin{aligned}
 x(t) & \xrightarrow{\text{TF}} \mathbb{X}(\omega) \\
 -jtx(t) & \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d\mathbb{X}(\omega)}{d\omega} \\
 tx(t) & \xrightarrow{\text{TF}} j \frac{d\mathbb{X}(\omega)}{d\omega}
 \end{aligned}$$

c) Integración en frecuencia:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & \mathbb{X}(\omega) \\ \frac{-1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & \int_{-\infty}^{\omega} \mathbb{X}(y)dy \end{array}$$

d) Desplazamiento en frecuencia:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & \mathbb{X}(\omega) \\ x(t)e^{j\omega_0 t} & \xrightarrow{\text{TF}} & \mathbb{X}(\omega - \omega_0) \end{array}$$

## 4.11. Propiedad de Modulación

Es la propiedad dual de la convolución y se enuncia de la siguiente manera:

$$r(t) = s(t)p(t) \xrightarrow{\text{TF}} R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * P(\omega)]$$

## 4.12. Concepto de Multiplexación en Frecuencia

Entendemos por **multiplexación** la acción de transmitir varios usuarios por un mismo canal. Ello es posible gracias a la modulación.

La *multiplexación por división de frecuencias* consiste en asignar a cada usuario una banda de frecuencias diferente.



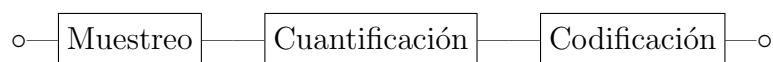
# Capítulo 5

## Representación digital de señales analógicas

Las señales que son más importantes para nosotros (la mayoría de las que percibimos por nuestros sentidos) son analógicas, mientras que las que las máquinas entienden son digitales.

En este tema veremos que cualquier señal se puede representar en formato digital.

Para representar una señal analógica como digital se siguen tres pasos:



El primero (*muestreo*) consiste en quedarse con su valor en unos instantes. La *cuantificación* (o redondeo, truncado) es necesaria porque en el mundo digital no hay la precisión infinita del continuo. Por último, la *codificación* nos da su representación en binario.

### 5.1. Operación de Muestreo

**Muestrear** una señal analógica consiste en quedarnos con unas muestras en distintos instantes de tiempo. Esto nos da una aproximación.

Matemáticamente lo representamos por un producto por un *tren de deltas*:

donde

$$\begin{aligned} T &\equiv \text{período de muestreo} \\ \frac{2\pi}{T} &\equiv \omega_s \equiv \text{frecuencia de muestreo (rads/s)} \\ \frac{1}{T} &\equiv f_s \equiv \text{frecuencia de muestreo (Hz)} \end{aligned}$$

Se puede expresar:

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)
 \end{aligned}$$

La operación de muestreo no siempre es **invertible**. Para que funcione bien debemos garantizar esa *invertibilidad* ajustando el período de muestreo a las fluctuaciones de la señal en el tiempo. A mayor cantidad de fluctuaciones, más muestreo es necesario.

Si recordamos, cuando hablábamos de frecuencia la relacionábamos con el ancho de banda. Una rápida fluctuación significará poco ancho de banda y viceversa. Esta relación se plasma en el siguiente teorema:

### Teorema del Muestreo

Llamaremos:

$$\mathbb{X}(\omega) = TF[x(t)] \equiv \text{señal banda base}$$

$$\begin{aligned}
 P(\omega) = TF[p(t)] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{X}_p(\omega) &= TF[x_p(t)] = TF[x(t)p(t)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{X}(\omega) * P(\omega) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{X}(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\
 &= \frac{1}{T} \mathbb{X}(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{X}(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{X}(\omega - k\omega_s)
 \end{aligned}$$

Lo representamos:

Se trata de evitar:

El efecto de muestrear en frecuencia es la réplica de la señal original, como podemos observar en las gráficas anteriores.

El modo de garantizar que las frecuencias no se solapan (caso en que el muestreo no es invertible) es elegir una frecuencia adecuada. La condición que se impone es:

$$\omega_1 < \omega_s - \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_s > 2\omega_1}$$

Este resultado se conoce como el **Teorema del Muestreo**, y fue enunciado por Harry Nyquist en 1928:

Sea  $x(t)$  una señal de banda limitada ( $X(\omega) = 0$  para  $|\omega| > \omega_1$ <sup>1</sup>); entonces  $x(t)$  se determina unívocamente por sus muestras  $x(nT)$  siempre que se cumpla:

$$\omega_s > 2\omega_1$$

donde  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  es la frecuencia de muestreo.

---

<sup>1</sup> $\omega_1$  ancho de banda.

## 5.2. El Fenómeno de Solapamiento (Aliasing)

Cuando *no se muestrea adecuadamente la señal* se produce la *distorsión* que ya hemos mencionado, que se conoce con el nombre de **solapamiento** (en inglés, *aliasing*).

Podemos ver sus consecuencias detalladamente en el ejemplo al que remitimos, en las transparencias.

## 5.3. Cuantificación

**Cuantificar** consiste en *redondear las muestras* que se toman de la señal. Cuando muestreamos una señal, discretizamos el eje del tiempo, pero el eje vertical sigue siendo continuo (y por tanto con precisión infinita), de modo que se ha de llevar a cabo este proceso de redondeo que invariablemente va a reducir esa precisión, pero que es necesario<sup>2</sup>.

Los parámetros que caracterizan un **cuantificador** son:

1. Se divide el eje vertical en un determinado número de trozos. Llamamos  $\Delta$  al **escalón de cuantificación**,  $x_{\max}$  es el **rango del cuantificador** y  $N$  el **número de niveles** (divisiones) del cuantificador:

$$2x_{\max} = N \cdot \Delta \Rightarrow \Delta = \frac{2x_{\max}}{N}$$

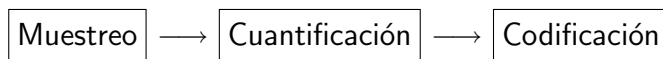
Un *cuantificador* puede representarse como un sistema<sup>3</sup>.

La potencia del *error de cuantificación* está determinada por el tamaño del escalón de cuantificación (que controla la precisión, a costa de tener más niveles y por tanto más complejidad).

Para llegar a un compromiso entre precisión y complejidad, se usa a veces un *cuantificador no uniforme*<sup>4</sup>, caracterizado porque el tamaño del escalón, como su propio nombre indica, no es uniforme, lo cual puede interpretarse como el hecho de permitir cometer poco error en señales débiles y consentir errores mayores en señales más amplias.

## 5.4. Codificación

Es el tercer paso del proceso de discretización de una señal continua, sucesor natural de los dos previos que hemos visto:



El proceso de **codificación** responde a la pregunta “¿Cómo representamos la señal muestreada y cuantificada *en binario*?” Para responder a ello existen varias técnicas.

### 5.4.1. PCM

Esta técnica de codificación, consistente en numerar los niveles de cuantificación y expresar éstos en binario<sup>5</sup>, se conoce con el nombre de **PCM** (Pulse Code Modulation), y

<sup>2</sup>De nuevo remitimos a las transparencias.

<sup>3</sup>Ver representación en transparencias.

<sup>4</sup>Del cual también tenemos un ejemplo en transparencias.

<sup>5</sup>Ver transparencias.

utiliza la misma filosofía seguida por ASCII en textos, por ejemplo.

Sin embargo, pese a su uso extendido, no es una técnica que se destaque por su eficiencia, ya que el número de bits por muestra es  $b = \log_2 N$  (por ejemplo, para  $N = 8 \Rightarrow b = 3$ ). Existen otras técnicas que utilizan un número de bits variable y optimizan su rendimiento.

### 5.4.2. Otras técnicas

Si analizamos una señal de vídeo, por ejemplo, observaremos que entre un instante y el siguiente hay mucha información redundante. Técnicas como **MPEG** utilizan esto, evitando el transmitir toda esa redundancia, basándose en que una muestra no es independiente de las demás, obteniendo una representación más eficiente.

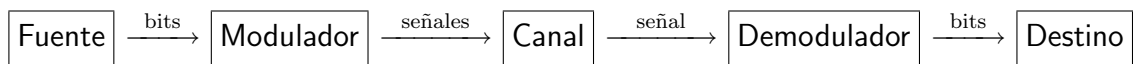


# Capítulo 6

## Fundamentos de Transmisión Digital

### 6.1. Modelo de Sistema de Comunicaciones Digital

Manejaremos un *modelo* de Sistema de Comunicaciones Digital cuyo **diagrama de bloques** es el siguiente:



#### 6.1.1. Fuente

La información (y por tanto la fuente) puede ser de tres tipos:

- \* *Analógica* (audio, imágenes, vídeo).
- \* *Texto*.
- \* *Datos*.

La naturaleza de la fuente será indiferente porque al final tendremos un *chorro de bits* (se emitirán ceros y unos) independiente de aquélla, ya sea directamente o bien muestreando, ...

La caracterizamos por:

$$\mathbf{R}_b = \text{bits/seg.}$$

#### 6.1.2. Modulador

El **modulador** hace corresponder secuencias de bits con señales.

El caso más sencillo es el *binario*:

$$\begin{aligned} \text{"0"} &\rightarrow s_0(t) \\ \text{"1"} &\rightarrow s_1(t) \end{aligned}$$

Veremos unos cuantos ejemplos:

(a) SISTEMA BINARIO UNIPOLAR

$T_S \equiv$  período de símbolo

(b) SISTEMA BINARIO BIPOLAR

(c) SISTEMA BINARIO BIFASE

El número de posibilidades es tan diverso porque la forma de onda no es importante, lo que es realmente relevante para su detección es su *energía*.

También nos podríamos encontrar con un **modulador cuaternario**<sup>1</sup>, del tipo:

$$\text{"00"} \rightarrow s_0(t)$$

$$\text{"01"} \rightarrow s_1(t)$$

$$\text{"10"} \rightarrow s_2(t)$$

$$\text{"11"} \rightarrow s_3(t)$$

Como por ejemplo,

---

<sup>1</sup>O con más señales incluso: 8, 16,...

### Parámetros

Los parámetros que controlan un *modulador* son:

$T_S$  período de símbolo (segundos)

$v_S$  velocidad de símbolo, número de símbolos transmitidos por segundo (símbolos/seg. ó *baudios*). Se cumple que

$$v_S = \frac{1}{T_S}$$

$b$  número de bits por símbolo

$M$  número de señales del modulador,  $M = 2^b$

$v_b$  velocidad de bit

$$v_b = b \cdot v_S = \log_2 M \cdot v_S = \frac{\log_2 M}{T_S}$$

En binario  $v_b = v_S$  ya que  $M = 2$  y  $b = 1$ , pero en general  $v_b \neq v_S$ .

Para controlar la velocidad se “juega” con los parámetros  $v_S$  y  $b$ ; el primero está limitado por el ancho de banda, mientras que el segundo lo está por el ruido. Se busca lograr el mejor compromiso entre los dos que más nos beneficie.

### 6.1.3. Canal

El modelo que utilizaremos para representarlo es el siguiente:

$$s_i(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \oplus \xrightarrow{\text{ruido } n(t)} r_i(t)$$

Es decir,

$$r_i(t) = s_i(t) * h(t) + n(t)$$

No vamos a entrar en los detalles de cómo funciona un canal, simplemente analizaremos sus respuestas al impulso y el ruido que introducen.

Distinguiremos entre:

- *Canales paso bajo*  $\Rightarrow$  modulador paso bajo ó modulador banda base.
- *Canales paso banda*  $\Rightarrow$  modulador paso banda.

### Parámetros

Tendremos en cuenta sólo dos parámetros:

$\hookrightarrow$  Potencia del ruido.

$\hookrightarrow$  Ancho de banda.

### 6.1.4. Demodulador

Es un dispositivo totalmente análogo al modulador, que realiza su función inversa.

### 6.1.5. Destino

Recupera los bits a partir de la señal que le llega.

## 6.2. Sistema de Transmisión PAM

El **sistema de transmisión PAM** (Pulse Amplitude Modulation, *Modulación de la Amplitud de Pulsos*) es un sistema banda-base en el que las señales del modulador se construyen cambiando la amplitud del pulso:

$$s_i(t) = A_i p(t)$$

$$A_i = M - 2i - 1 \quad i = 0, \dots, M - 1$$

Por ejemplo, en el caso binario:

$$M = 2$$

$$A_0 = 2 - 0 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_0(t) = p(t)$$

$$A_1 = 2 - 2 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad s_1(t) = -p(t)$$

Y en el cuaternario:

$$M = 4$$

$$A_0 = 4 - 0 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad s_0(t) = 3p(t)$$

$$A_1 = 4 - 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_1(t) = p(t)$$

$$A_2 = 4 - 4 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad s_2(t) = -p(t)$$

$$A_3 = 4 - 6 - 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad s_3(t) = -3p(t)$$

Por tanto, la señal PAM puede escribirse:

$$s(t) = I_0 p(t) + I_1 p(t - T_S) + I_2 p(t - 2T_S) + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k p(t - kT_S)$$

donde  $I_k$  es la *amplitud transmitida* en el intervalo  $[kT_S, (k+1)T_S]$ , siendo  $T_S$  el período de símbolo.



$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k p(t - kT_S) \quad z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{I}_k \delta(t - kT_S)$$

donde  $I_k$  es la *amplitud transmitida* e  $\hat{I}_k$  la *amplitud medida*. Se toman muestras cada  $T_S$  y se decide posteriormente.

En un *canal ideal*,  $I_k = \hat{I}_k$ , pero en un *canal real*  $I_k \neq \hat{I}_k$ , lo que nos traerá problemas, ya que puede hacer que el decisor interprete la señal que le llega erróneamente.

### 6.2.1. Transmisión PAM por canales de banda limitada

Nuestro canal estará caracterizado por una respuesta al impulso  $h(t)$ , cuya T.F.  $H(\omega)$  será:

Consecuentemente, el canal recortará las frecuencias de la señal de entrada, dejando pasar sólo aquellas que se encuentren en el rango  $-\omega_c < \omega < \omega_c^2$ .

Es por ello que el ancho de banda es tan importante; también influye la forma del pulso, de modo que nos interesará encontrar aquél que sea más *robusto*.

Se puede demostrar que, de todos los posibles, el óptimo es el **pulso de Nyquist**, que es de la forma:

$$p(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_S}t\right)}{\frac{\pi t}{T_S}}$$

Es decir, una *sinc* en el dominio del tiempo; su transformada de Fourier, por tanto, es:

$$P(\omega) = \begin{cases} T_S & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_S} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Gráficamente:

De modo que está claro que si utilizamos un canal de amplitud mayor que  $\frac{\pi}{T_S}$  no tendremos problemas en el recorte de la señal.

Para tomar muestras en múltiples períodos de símbolo, hay que tener en cuenta dónde cortan al eje horizontal los *pulsos de Nyquist*. Debido a su forma, en cada período de símbolo sólo hay contribución de una sola señal, de modo que no es necesario que un pulso acabe para lanzar otro<sup>3</sup>.

El límite en el ancho de banda del canal para los pulsos de Nyquist es el ancho de banda del pulso en frecuencia:

$$\omega_{\min} = \frac{\pi}{T_S} = \omega_S \quad (\text{rad/s})$$

---

<sup>2</sup>Ver transparencias tema 6.

<sup>3</sup>Ver transparencias.

Equivalentemente:

$$B_{\min}(\text{Hz}) = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{1}{2T_S} \quad (\text{Hz})$$

Puesto que la velocidad de símbolo es el inverso del período de símbolo,  $v_S = \frac{1}{T_S}$ , el ancho de banda mínimo también puede expresarse en función de dicha velocidad:

$$B_{\min} = \frac{v_S}{2} \quad (\text{Hz})$$

Y así, dado un ancho de banda, podemos calcular la velocidad de símbolo:

$$v_{S_{\max}} = 2B_{\min} \quad (\text{símbolos o muestras por segundo})$$

### 6.2.2. Ancho de banda equivalente rectangular

Dado un pulso, con un determinado ancho de banda, se puede expresar como un **ancho de banda** (*espectro*) **equivalente rectangular**:

La  $\omega_{\text{equiv}}$  se calcula sabiendo que tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\text{equiv}}(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega &= |H(0)|^2 2\omega_{\text{equiv}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_{\text{equiv}} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{2|H(0)|^2} \quad (\text{rad/s}) \end{aligned}$$

Expresado en *herzios* (utilizando la relación de Parseval y la definición de energía):

$$\begin{aligned} B_{\text{equiv}}(\text{Hz}) &= \frac{\omega_{\text{equiv}}}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{2|H(0)|^2} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt}{2|H(0)|^2} \\ &= \frac{E_h}{2|H(0)|^2} \end{aligned}$$

De esta manera, un canal no ideal se puede transformar en uno equivalente rectangular.

# Capítulo 7

## Introducción a Procesos Estocásticos

En las comunicaciones nos encontramos con tres limitaciones principales:

- La debida al *ancho de banda* del canal.
- La debida al *ruido*.
- La debida a la *complejidad* de la señal.

Llamamos **ruido** a las señales no deseadas que se suman a la que estamos transmitiendo. Lo modelaremos como señales aleatorias (no deterministas como las que hemos visto hasta ahora), lo cual nos introduce un pequeño inconveniente: ¿cómo conocer su valor en el futuro? Para ello necesitaremos echar mano de la *estadística* para estimar la probabilidad de que la señal tome un valor determinado en un instante concreto.

### 7.1. Concepto de Proceso Estocástico

#### Definición: Variable Aleatoria<sup>1</sup>

Una **variable aleatoria** es una regla para asignar al resultado  $A$  de un experimento aleatorio un número  $x(A)$ .

Lo representaremos:

$$x \equiv \text{variable aleatoria}$$

#### Definición: Proceso Estocástico

Un **proceso estocástico** es una regla para asignar al resultado  $A$  de un experimento aleatorio una función  $x(t, A)$ .

Lo representaremos:

$$x(t) \equiv \text{proceso estocástico}$$

Este concepto es, pues, una *generalización* del de V.A., ya que se refiere a aquellos experimentos aleatorios cuyo resultado es una función.

---

<sup>1</sup>Lo abreviaremos V.A.

## CONSIDERACIONES

- ▷ Para cada  $A$  (experimento) se obtiene una función del tiempo, lo que se llama una **realización del proceso estocástico**, que sí es determinista.
- ▷ Para cada instante de tiempo  $t$  (si fijamos  $t$ ) obtenemos una variable aleatoria V.A., que es el valor de la realización en un instante de tiempo<sup>2</sup>.
- ▷ Se entiende por **proceso estocástico** todas las realizaciones posibles del experimento (concepto a priori).

## 7.2. Descripción Estadística de una V.A.

### 7.2.1. Descripción Completa

Se usa la **función de distribución**, la probabilidad de que la V.A. tome un valor *menor o igual* que  $x$ :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} \leq x)$$

También podría usarse la **función densidad de probabilidad**, la probabilidad de que la V.A. tome un valor en el intervalo diferencial:

$$f_{\mathbb{X}}(x) = \frac{d\mathcal{F}_{\mathbb{X}}(x)}{dx}$$

### 7.2.2. Descripción Parcial

Se hace en función de los **momentos**:

#### Media

$$\mathcal{E}[\mathbb{X}] = m_{\mathbb{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbb{X}}(x) dx$$

#### Valor Cuadrático Medio

Es el momento de orden 2:

$$\mathcal{E}[\mathbb{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathbb{X}}(x) dx$$

#### Varianza

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathcal{E}[(\mathbb{X} - m_{\mathbb{X}})^2] = \mathcal{E}[\mathbb{X}^2] - m_{\mathbb{X}}^2$$

---

<sup>2</sup>Recíprocamente podemos decir que un proceso estocástico es una V.A. que cambia con el tiempo.

**Correlación**

Mide el “parecido” estadístico entre dos V.A.  $X$  e  $Y$ :

$$\mathcal{E}[XY]$$

## 7.3. Descripción Estadística de un Proceso Estocástico

La descripción estadística **completa** es muy compleja y no la usaremos. Veremos, pues, la descripción **parcial**, que usa:

**Media**

$$\mathbf{m}_X(t) = \mathcal{E}[x(t)]$$

**Función de Autocorrelación**

Es la correlación entre  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ :

$$\mathcal{R}_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}[x(t_1) \cdot x(t_2)]$$

**Valor Cuadrático Medio**

Es la función de autocorrelación cuando  $t_1 = t_2$ :

$$\mathbb{E}[x^2(t)] = \mathcal{R}_X(t, t)$$

**Varianza**

$$\sigma_X^2(t) = \mathcal{E}[(x(t) - \mathbf{m}_X(t))^2] = \mathcal{E}[x^2(t)] - \mathbf{m}_{X^2}(t) = \mathcal{R}_X(t, t) - \mathbf{m}_{X^2}(t)$$

## 7.4. Procesos Estacionarios

Un **proceso estacionario** es un proceso cuya descripción estadística no cambia con el tiempo.

CONSECUENCIAS

▷ La *media* es una *constante*, ya no es una función:

$$\mathcal{E}[x(t)] = \mathbf{m}_x$$

y en nuestro caso se va a medir en **voltios**.

▷ La *función de autocorrelación* va a depender sólo de  $t_2 - t_1$ , así que redefinimos

$$t_1 = t \quad \text{y} \quad t_2 = t + \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = t_2 - t_1$$

para tener

$$\mathcal{R}_x(t_1, t_2) = \mathcal{R}_x(t, t + \tau) = \mathcal{R}_x(t, \tau) = \mathbf{R}_x(\tau) = \mathcal{E}[x(t) \cdot x(t + \tau)]$$

de modo que se simplifica la función de autocorrelación hasta poder expresarse como función de una sola variable. Esto se interpreta como que la correlación entre dos instantes separados el mismo intervalo de tiempo es la misma; la correlación es *independiente del origen de tiempos*. Por ejemplo:

$$\mathcal{E}[x(t_1 = 12) \cdot x(t_2 = 12, 3)] = 0'9 = \mathcal{E}[x(t_1 = 16) \cdot x(t_2 = 16, 3)]$$

▷ El *valor cuadrático medio* es también una *constante*:

$$\mathcal{E}[x^2(t)] = \mathcal{E}[x(t) \cdot x(t)] = \mathcal{R}_x(0)$$

El significado físico es que el V.C.M. (que es la función de autocorrelación en el origen) mide la **potencia total** del ruido (en **watios**).

▷ Asimismo, es *constante* la *varianza*:

$$\sigma_x^2 = \mathcal{E}[(x(t) - \mathbf{m}_x)^2] = \mathcal{E}[x^2(t)] - \mathbf{m}_x^2 = \mathcal{R}_x(0) - \mathbf{m}_x^2$$

En este caso la interpretación física es la medición de las fluctuaciones alrededor del valor medio, esto es, la potencia de la componente alterna del ruido en términos electrónicos.

Es decir, se tiene:

$$\underbrace{\mathcal{R}_x(0)}_{\text{potencia total ruido}} = \underbrace{\sigma_x^2}_{\text{potencia cpte. alterna}} + \underbrace{\mathbf{m}_x^2}_{\text{potencia cpte. continua}}$$

De modo que si la media es cero ( $\mathbf{m}_x = 0$ ):

$$\mathcal{R}_x(0) = \sigma_x^2$$

## 7.5. Propiedades de la Función de Autocorrelación

Se tienen las siguientes propiedades para la autocorrelación  $\mathcal{R}_x(\tau)$ :

1. La autocorrelación de  $\tau = 0$  es la potencia total del ruido.

$$\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{E}[x^2(t)] = P_x$$

2. Si  $x(t)$  es real, entonces  $\mathcal{R}_X(\tau)$  es real y simétrica.

$$x(t) \text{ real} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_X(-\tau) = \mathcal{R}_X(\tau)$$

3. El máximo ocurre en  $\tau = 0$ .

$$|\mathcal{R}_X(\tau)| \leq \mathcal{R}_X(0)$$

4. La transmisión de un proceso a través de un sistema L.T.I.:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \circ - \boxed{h(t)} - \circ & y(t) = x(t) * h(t) \\ \mathcal{R}_X(\tau) & & \mathcal{R}_Y(\tau) \end{array}$$

Se cumple:

$$\mathcal{R}_Y(\tau) = \mathcal{R}_X(\tau) * \mathcal{R}_H(\tau)$$

Donde, puesto que  $\mathcal{R}_X(\tau)$  y  $\mathcal{R}_Y(\tau)$  son aleatorias:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_X(\tau) &= \mathcal{E}[x(t) \cdot x(t + \tau)] \\ \mathcal{R}_Y(\tau) &= \mathcal{E}[y(t) \cdot y(t + \tau)] \end{aligned}$$

Y como  $\mathcal{R}_H(\tau)$  es determinista,

$$\mathcal{R}_H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t + \tau) dt$$

## 7.6. Densidad Espectral de Potencia

Es la T.F. de la función de autocorrelación:

$$\mathcal{G}_X(\omega) = TF[\mathcal{R}_X(\tau)]$$

$$\mathcal{G}_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_X(\tau) \tau^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathcal{R}_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_X(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

Se le llama **densidad espectral de potencia** porque  $\mathcal{G}_X(\omega)$  nos dice cómo se distribuye la potencia  $P_X$  del proceso a lo largo de las frecuencias:

$$\mathcal{R}_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_X(\omega) d\omega = P_X$$

Sus unidades son **watios/Hz**. Podemos ver que se trata de una *energía*, ya que es una potencia entre una frecuencia.

### 7.6.1. Propiedades de la Densidad Espectral de Potencia

Son análogas a las que veíamos en su momento (sección 4.8.1, página 43) para la Densidad Espectral de Energía, ya que de hecho nos ofrece la misma información pero en el dominio de la frecuencia:

1. Es una función real y positiva de  $\omega$ :

$$\mathcal{G}_X(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

2. Si  $x(t)$  es real,  $\mathcal{G}_X(\omega)$  es simétrica:

$$x(t) \text{ real} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_X(-\omega) = \mathcal{G}_X(\omega)$$

3. Relación entrada-salida en un sistema L.T.I.:

$$\mathcal{G}_X(\omega) \quad \circ - \boxed{H(\omega)} - \circ \quad \mathcal{G}_Y(\omega)$$

$$\mathcal{G}_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot \mathcal{G}_X(\omega)$$

## 7.7. Ejemplos

Remitimos a las transparencias de la asignatura correspondientes a este tema<sup>3</sup>.

---

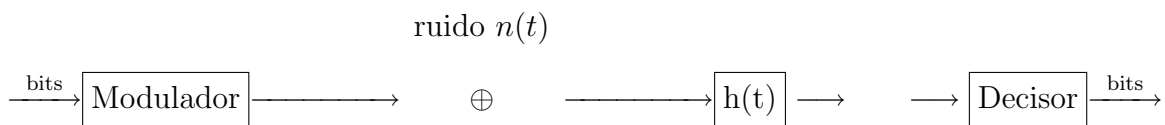
<sup>3</sup>A partir de la etiquetada como (36).

# Capítulo 8

## Transmisión digital por canales con ruido

### 8.1. Modelo

Manejaremos al modelo:



donde

$$\begin{aligned} \text{señal transmitida} &\equiv s(t) \\ \text{ruido del canal} &\equiv n(t) \\ \text{señal recibida} &\equiv r(t) = s(t) + n(t) \end{aligned}$$

La novedad de este modelo es el *filtro* que introducimos con la intención de eliminar ruido.

#### 8.1.1. Modelo de ruido

Como ya hemos comentado, vamos a modelar el *ruido* mediante variables aleatorias, que vimos que se modelan mediante procesos estocásticos. Así,

El **ruido**,  $n(t)$ , es un *proceso estocástico estacionario*.

Y va a tener las siguientes características:

- *Media nula*, por ser un proceso estocástico.
- *Densidad espectral de potencia constante*:

$$\mathcal{G}_n(\omega) = \frac{N_0}{2} = \text{cte.} \quad \left( \frac{\text{watts}}{\text{Hz}} \right)$$

Cuadro 8.1: Densidad espectral de potencia.

Función de autocorrelación del ruido.

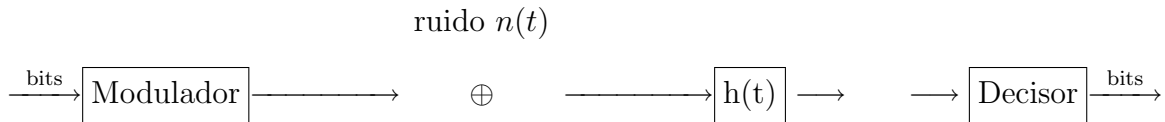
- Su *función de autocorrelación*,

$$\mathcal{R}_n(\tau) = \mathcal{E}[x(t) \cdot x(t + \tau)] = TF^{-1}[\mathcal{G}_n(\omega)] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- Su *función de distribución* es *gaussiana*, también llamada *normal*.

Un ruido de estas características se denomina **ruido blanco gaussiano**: *blanco* porque la densidad espectral de potencia es constante y *gaussiano* porque la función de distribución es gaussiana.

## 8.2. Detección de señales binarias en ruido gaussiano



### Señal transmitida

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) & 0 \leq t \leq T & \iff \text{"0"} \\ s_1(t) & 0 \leq t \leq T & \iff \text{"1"} \end{cases}$$

Se limita la señal a  $[0, T]$  (pulso) para simplificar.

### Señal recibida

Tiene dos componentes, una *determinista*  $s_i(t)$  (debida a la señal que transmitimos), y una *aleatoria*  $n(t)$  (debida al ruido):

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

### Salida del filtro

$$\begin{aligned} z(t) = r(t) * h(t) &= (s_i(t) + n(t)) * h(t) = s_i(t) * h(t) + n(t) * h(t) \\ &= a_i(t) + n_0(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_i(t) = s_i(t) * h(t) &\equiv \text{salida del filtro en ausencia de ruido} \\ n_0(t) = n(t) * h(t) &\equiv \text{ruido a la salida del filtro} \end{aligned}$$

### Características del ruido

Como ya comentamos, son:

- Media nula.
- Función de densidad de probabilidad gaussiana.
- Densidad espectral de potencia:

$$\mathcal{G}_{n_0}(\omega) = \mathcal{G}_n(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2$$

- Potencia de  $n_0(t)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{n_0}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \quad \equiv \mathbf{Finito} \end{aligned}$$

### Observación o muestreo

$$\begin{aligned} z &= z(t = T) = a_i + n_0 \\ a_i &= a_i(t = T) = s_i(t) * h(t)|_{t=T} \\ n_0 &= n_0(t = T) = n(t) * h(t)|_{t=T} \end{aligned}$$

$n_0(t)$  es un *proceso estocástico*, de modo que  $n_0$ , que es una observación en un instante del tiempo, es una *variable aleatoria*, cuya función de densidad de probabilidad es gaussiana, función que queda determinada por dos parámetros, la media y la varianza:

- La media es nula.
- La varianza  $\sigma_0$ , al tener media cero, es la potencia del ruido:

$$p(n_0) = N(0, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{n_0^2}{2\sigma_0^2} \right]$$

Usaremos:

$$\begin{aligned} p(z|a_0) &= N(a_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(z - a_0)^2}{2\sigma_0^2} \right] \\ p(z|a_1) &= N(a_1, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(z - a_1)^2}{2\sigma_0^2} \right] \end{aligned}$$

Las expresiones  $p(z|a_0)$  y  $p(z|a_1)$  son *verosimilitudes*, expresiones de probabilidad condicionada.

**Decisor**

Tendremos:

$$\begin{aligned}\text{Hipótesis 0} &= \text{transmitir } s_0(t) \\ \text{Hipótesis 1} &= \text{transmitir } s_1(t)\end{aligned}$$

La decisión que tomemos puede ser errónea debido al ruido. Consideraremos:

$$\begin{aligned}\text{Error 0} &: \text{ se decide H1 cuando se transmitió } s_0(t) \\ \text{Error 1} &: \text{ se decide H0 cuando se transmitió } s_1(t)\end{aligned}$$

La probabilidad de error condicionada:

$$\begin{aligned}\text{Error 0} &\Rightarrow p(\text{error}|s_0) \\ \text{Error 1} &\Rightarrow p(\text{error}|s_1)\end{aligned}$$

La probabilidad de error total (usando el *Teorema de la Probabilidad Total*):

$$p(\text{error}) = p(s_0)p(\text{error}|s_0) + p(s_1)p(\text{error}|s_1)$$

Las probabilidades  $p(s_0)$  y  $p(s_1)$  se llaman *probabilidades a priori*.

**Regla de decisión**

La *regla de decisión óptima*, que minimiza  $p(\text{error})$ , se demuestra que es:

$$\begin{aligned}p(s_0|z) > p(s_1|z) &\Rightarrow \text{H0} \\ p(s_1|z) > p(s_0|z) &\Rightarrow \text{H1}\end{aligned}$$

Que también se puede expresar:

$$p(s_0|z)^{\text{H0}} \gtrsim_{\text{H1}} p(s_1|z)$$

donde las probabilidades  $p(s_0|z)$  y  $p(s_1|z)$  son *probabilidades a posteriori*.

Esta regla de decisión se llama **MAP** (*Máximo a Posteriori*). Sin embargo, no se puede aplicar directamente porque no conocemos  $p(s_0|z)$  ni  $p(s_1|z)$ , sino  $p(s_1)$ ,  $p(s_0)$ ,  $p(z|s_0)$  y  $p(z|s_1)$ .

Por el *Teorema de Bayes* podemos reescribirla:

$$p(s_0|z) = \frac{p(s_0)p(z|s_0)}{p(z)} \gtrsim_{\text{H1}} \frac{p(s_1)p(z|s_1)}{p(z)} = p(s_1|z)$$

Es decir,

$$p(s_0)p(z|s_0)^{\text{H0}} \gtrsim_{\text{H1}} p(s_1)p(z|s_1)$$

A partir de ahora supondremos que las probabilidades a priori  $p(s_0)$  y  $p(s_1)$  son iguales, lo cual es bastante razonable, ya que significa que es igual de probable transmitir un 0 que un 1. De modo que podemos hacer:

$$p(s_0) = p(s_1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}p(z|s_0)^{H_0} \geq_{H_1} \frac{1}{2}p(z|s_1)$$

$$\boxed{p(z|s_0)^{H_0} \geq_{H_1} p(z|s_1)}$$

Esta regla se denomina **regla de máxima verosimilitud**, y sí es posible aplicarla porque sí conocemos  $p(z|s_0)$  y  $p(z|s_1)$ , las verosimilitudes. No conviene olvidar que sólo es óptima (en el sentido de que minimiza la probabilidad de error) si las probabilidades a priori son iguales (es nuestra hipótesis).

Aprovechando la propiedad:

$$x \geq y \Leftrightarrow \ln x \geq \ln y$$

(en cualquier base, por ser la función logaritmo siempre creciente), podemos escribir de nuevo nuestra regla:

$$\ln p(z|s_0)^{H_0} \geq_{H_1} \ln p(z|s_1)$$

Algo que nos simplifica mucho las operaciones al hacer<sup>1</sup>:

$$\ln \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} - \frac{(z - a_0)^2}{2\sigma_0^2} \stackrel{H_0}{\geq}_{H_1} \ln \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} - \frac{(z - a_1)^2}{2\sigma_0^2}$$

Simplificando,

$$-(z - a_0)^2 \stackrel{H_0}{\geq}_{H_1} -(z - a_1)^2$$

Y como

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y$$

entonces

$$(z - a_0)^2 \stackrel{H_0}{\leq}_{H_1} (z - a_1)^2$$

$$\boxed{(z - a_0)^2 \stackrel{H_0}{\leq}_{H_1} (z - a_1)^2}$$

Expresión conocida como **regla de decisión de la mínima distancia Euclídea**, ya que  $(z - a_0)^2$  es una distancia. Esto le da además una interpretación geométrica.

Si seguimos operando...

<sup>1</sup>Estamos utilizando indistintamente  $a_0$  y  $s_0$ , así como  $a_1$  y  $s_1$ .

$$\begin{aligned}
z^2 + a_0^2 - 2za_0 &\stackrel{H_0}{\leq}_{H_1} z^2 + a_1^2 - 2za_1 \\
a_0^2 - a_1^2 &\stackrel{H_0}{\leq}_{H_1} 2z(a_0 - a_1) \\
(a_0 + a_1) \cdot (a_0 - a_1) &\stackrel{H_0}{\leq}_{H_1} 2z(a_0 - a_1)
\end{aligned}$$

Supongamos que  $a_0 > a_1 \Rightarrow a_0 - a_1 > 0$ . Entonces,

$$a_0 + a_1 \stackrel{H_0}{\leq}_{H_1} 2z \Rightarrow \boxed{z \stackrel{H_0}{\geq}_{H_1} \frac{a_0 + a_1}{2}}$$

De modo que al final, la regla de decisión consiste en comparar el valor observado con un  $z$  *umbral*, que es el punto medio entre las observaciones sin ruido. Este umbral, además, es el *óptimo*:

$$\gamma_{\text{OPT}} = \frac{a_0 + a_1}{2} \equiv \text{umbral óptimo}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
a_0 = +2, \quad a_1 = -2 &\Rightarrow \gamma_{\text{OPT}} = 0 \\
a_0 = +2, \quad a_1 = 0 &\Rightarrow \gamma_{\text{OPT}} = 1
\end{aligned}$$

Que esta regla sea la mejor no quiere decir, no obstante, que la probabilidad de error sea nula, como veremos a continuación.

### Probabilidad de error

Como ya vimos,

$$p(e) = p(s_0)p(e|s_0) + p(s_1)p(e|s_1)$$

$$\begin{aligned}
p(e|s_0) &= p(z < \gamma_{\text{OPT}}|s_0) \\
p(e|s_1) &= p(z > \gamma_{\text{OPT}}|s_1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, ya que es igual de probable transmitir un 0 que transmitir un 1,

$$p(e|s_0) = p(e|s_1) \quad \text{y} \quad p(s_0) = p(s_1) = \frac{1}{2}$$

De modo que

$$p(e) = \frac{1}{2}p(e|s_0) + \frac{1}{2}p(e|s_1) = p(e|s_1)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
p(e) &= p(e|s_1) = p(z > \gamma_{\text{OPT}}|s_1) \\
&= \int_{\gamma_{\text{OPT}}}^{\infty} p(z|s_1) dz = \int_{\gamma_{\text{OPT}}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(z - a_1)^2}{2\sigma_0^2} \right] dz
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \frac{z - a_1}{\sigma_0} = u &\Rightarrow z = \sigma_0 u + a_1 \Rightarrow dz = \sigma_0 du \\ \gamma_{\text{OPT}} = \frac{a_0 + a_1}{2} &\Rightarrow u = \frac{\gamma_{\text{OPT}} - a_1}{\sigma_0} = \frac{\frac{a_0 + a_1}{2} - a_1}{\sigma_0} = \frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0} \\ z = \infty &\Rightarrow u = \infty \end{aligned}$$

Y nos queda:

$$p(e) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0}}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \sigma_0 du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0}}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du$$

Esta integral ha de resolverse numéricamente (no por primitivas).

Definiremos la *función error complementario*, que se calcula numéricamente, como:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$p(e) = Q\left(\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0}\right)$$

Esta función es siempre decreciente, algo lógico pues cuanto mayor es la  $x$ , menor es el área que queda bajo la campana gaussiana<sup>2</sup>.

### Filtro adaptado

Los valores  $a_0$  y  $a_1$  son *dependientes del filtro*, ya que como hemos visto sus expresiones son:

$$\begin{aligned} a_0 &= s_0(t) * h(t)|_{t=T} \\ a_1 &= s_1(t) * h(t)|_{t=T} \end{aligned}$$

pues son los valores que obtenemos cuando transmitimos respectivamente  $s_0(t)$  y  $s_1(t)$  sin ruido. Como la probabilidad de error es:

$$p(e) = Q\left(\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0}\right)$$

podemos preguntarnos si existe una  $h(t)$ , un *filtro* que *maximice* el cociente  $\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0}$ , o lo que es lo mismo, que *minimice* el error  $p(e)$ . Lo denominaremos **filtro adaptado**.

Recordando que estamos suponiendo que  $a_0 - a_1 > 0$ , el filtro que buscamos es el mismo que maximiza  $\frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma_0^2}$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 &= s_0(t) * h(t)|_{t=T} - s_1(t) * h(t)|_{t=T} \\ &= [s_0(t) * h(t) - s_1(t) * h(t)]|_{t=T} \\ &= [(s_0(t) - s_1(t)) * h(t)]|_{t=T} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ver transparencias.

Definiremos la señal diferencia:

$$d(t) = s_0(t) - s_1(t)$$

para poder escribir

$$a_0 - a_1 = d(t) * h(t)|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d(t - \tau) d\tau|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d(T - \tau) d\tau$$

$$\frac{(a_0 - a_1)^2}{\sigma_0^2} = \frac{\left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d(T - \tau) d\tau \right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt}$$

Usando:

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARTZ

Sean  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  dos señales cualesquiera:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt$$

La igualdad se cumple cuando  $f_1(t) = k \cdot f_2(t)$  con  $k$  una constante arbitraria.

y considerando  $f_1 = h(\tau)$  y  $f_2 = d(T - \tau)$  podemos escribir

$$\frac{(a_0 - a_1)^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d^2(T - \tau) d\tau}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} = \frac{E_d}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2E_d}{N_0}$$

donde  $E_d$  (haciendo el cambio de variable  $T - \tau = t$ ) es la energía de  $d(t)$ :

$$E_d = \int_{-\infty}^{\infty} d^2(T - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d^2(t) dt$$

De modo que nos queda:

$$\frac{(a_0 - a_1)^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{2E_d}{N_0} \Rightarrow \frac{(a_0 - a_1)^2}{\sigma_0^2} \Big|_{\max} = \frac{2E_d}{N_0}$$

El máximo ocurre cuando  $h_{\text{opt}}(t) = k \cdot d(T - t)$ .

De modo que nuestro **filtro adaptado** será cualquiera que tenga como respuesta al impulso:

$$h_{\text{opt}}(t) = k[s_0(T - t) - s_1(T - t)]$$

donde la constante arbitraria  $k$  en realidad no importa demasiado debido a la linealidad del sistema LTI.

### Probabilidad de error mínima

Veamos qué aspecto tiene la probabilidad de error cuando utilizamos el filtro adaptado:

$$\begin{aligned} p_{\min}(e) &= Q\left(\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_0}\Big|_{\max}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a_0 - a_1)^2}{\sigma_0^2}}\Big|_{\max}\right) \\ &= Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E_d}{N_0}}\right) = \mathbf{Q}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{E}_d}{2\mathbf{N}_0}}\right) \end{aligned}$$

que no tiene dimensiones porque el numerador es una energía y el denominador la densidad espectral de energía, que también tiene unidades de energía.

#### Energía de bit

Cuando se da

$$\mathbf{E}_b = \int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)dt$$

es decir, cuando ambas integrales coinciden, podemos hablar de **energía de bit**, que es la que gastamos por cada bit que transmitimos.

Podemos expresar la diferencia  $E_d$  como

$$\begin{aligned} E_d &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s_0(t) - s_1(t))^2 dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t)dt}_{E_b} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)dt}_{E_b} - 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) \cdot s_1(t)dt}_{\rho E_b} \end{aligned}$$

Definimos

$$\rho = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)s_1(t)dt}{E_b} \Leftrightarrow \rho E_b = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)s_1(t)dt$$

Así,

$$E_d = E_b + E_b - 2\rho E_b = 2E_b - 2\rho E_b = 2E_b(1 - \rho)$$

y por tanto

$$p_{\min}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b(1 - \rho)}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1 - \rho)}\right)$$

La probabilidad de error  $p_{\min}(e)$  entonces depende sólo de dos parámetros:  $\rho$  y el cociente  $\frac{E_b}{N_0}$  (que tampoco tiene dimensiones: el numerador es la energía que se gasta por bit transmitido y el denominador la densidad espectral de energía, que da una idea de la

fuerza del ruido del canal<sup>3</sup>), que es el realmente importante.

Muchas veces este cociente se expresa en decibelios, para evitar las grandes fluctuaciones de valores y poder trabajar con un rango más homogéneo:

$$\frac{E_b}{N_0}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{E_b}{N_0}$$

$\frac{E_b}{N_0}$	$\frac{E_b}{N_0}(\text{dB})$
1	0 dB
10	10 dB
100	20 dB
1000	30 dB
0'1	-10 dB
0'01	-20 dB

En cuanto a  $\rho$ , el **producto escalar normalizado**, mide el parecido entre  $s_0(t)$  y  $s_1(t)$ , y está siempre comprendido entre  $-1 \leq \rho \leq 1$ , lo que se puede demostrar utilizando de nuevo la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) \cdot s_1(t) dt \right)^2 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)^2 dt}_{E_b} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)^2 dt}_{E_b} = E_b^2$$

$$\frac{\left( \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) \cdot s_1(t) dt \right)^2}{E_b^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in [-1, 1]$$

Si  $s_0(t) = s_1(t)$  (lo cual sería absurdo e inútil), entonces  $\rho = 1$  y por tanto

$$p(e) = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1 - 1)} \right) = Q(0) = \frac{1}{2}$$

puesto que no podrían distinguirse unos valores de otros.

El mejor valor es  $\rho = -1$ , para el cual  $s_1(t) = -s_0(t)$ .

Los valores de  $\rho$  y  $\frac{E_b}{N_0}$  son independientes entre sí.

---

<sup>3</sup>Por esta razón el cociente se puede interpretar como las veces que es superior la energía que se usa para transmitir respecto a la que se tiene en el canal.

## 8.3. Señalización ortogonal y antipodal

### 8.3.1. Señalización ortogonal

Se da cuando  $\rho = 0$  y, consecuentemente,  $p(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ .

Ejemplos:

### 8.3.2. Señalización antipodal

Se tiene para  $\rho = -1$ , cuando  $p(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ . En este caso, además,  $s_1(t) = -s_0(t)$ .

Esta señalización es la que permite conseguir la menor  $p(e)$  para una  $\frac{E_b}{N_0}$  dada<sup>4</sup>.

Ejemplos:

---

<sup>4</sup>Ver transparencias.

Esta última forma de onda se corresponde con un **sistema PAM binario**, con lo que concluimos que no otros sino éstos son los mejores sistemas de transmisión, los que permiten aprovechar mejor la relación  $\frac{E_b}{N_0}$ .

En este caso:

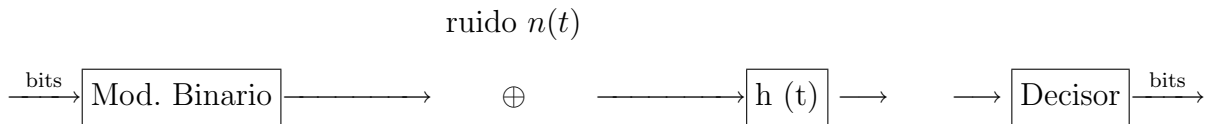
$$\left. \begin{array}{l} s_0(t) = p(t) \\ s_1(t) = -p(t) \end{array} \right\} \quad \text{con } p(t) \equiv \text{ pulso}$$

$$h_{\text{opt}}(t) = k[s_0(T-t) - s_1(T-t)] = k[p(T-t) - (-p(T-t))] = 2kp(T-t)$$

Podemos escoger  $k = \frac{1}{2}$  y así:

$$h_{\text{opt}}(t) = p(T-t)$$

que, como vemos, depende de  $p$ , por eso se denomina *filtro adaptado*.



### Salida del filtro adaptado

La salida del filtro adaptado es:

$$z(t) = a_i(t) + n(t)$$

donde

$$a_i(t) = s_i(t) * h_{\text{opt}}(t) = \pm p(t) * p(T-t)$$

La señal  $p(T-t)$  se puede expresar:

$$p(T-t) = p(-(t-T)) = p(-t) * \delta(t-T)$$

De modo que<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \pm \underbrace{p(t) * p(-t)} * \delta(t-T) \\ &= \pm R_p(t) * \delta(t-T) = \pm R_p(t-T) \end{aligned}$$

El filtro adaptado, pues, calcula la *función de autocorrelación* del pulso que se transmite.

### Observación:

$$a_i = a_i(t=T) = \pm R_p(t-T)|_{t=T} = \pm R_p(0) = \pm E_p$$

donde  $E_p$  es la *energía* de  $p(t)$ .

<sup>5</sup>El signo  $\pm$  es según transmitamos pulsos positivos o negativos.

### Decisión

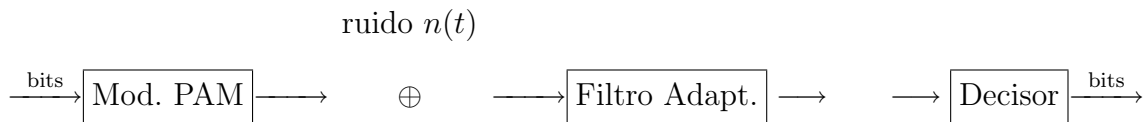
Sabemos que la decisión se toma acorde a:

$$z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{E_p - E_p}{2} = 0$$

es decir, si la observación es positiva, nos decidimos por la hipótesis cero, mientras que si es negativa, nos decantamos por la hipótesis uno. Es fácil darse cuenta de la sencillez de la implementación práctica de este decisor<sup>6</sup>.

## 8.4. Transmisión multinivel por canales con ruido

### 8.4.1. Sistema de transmisión M-PAM



#### Señal transmitida

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A_i p(t) & i &= 0, \dots, M-1 \\ A_i &= (2i + 1 - M) & i &= 0, \dots, M-1 \\ S_i(\omega) &= A_i P(\omega) \end{aligned}$$

Todas las señales  $S_i(\omega)$  tienen el mismo ancho de banda que  $P(\omega)$ .

#### Señal recibida

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

#### Filtro adaptado

$$h_{\text{opt}}(t) = kp(T-t)|_{k=1} = p(T-t)$$

<sup>6</sup>¡Bastaría mirar el bit de signo!

**Salida del filtro adaptado**

$$\begin{aligned}
 z(t) &= r(t) * h(t) &= a_i(t) + n_0(t) \\
 a_i(t) &= s_i(t) * h_{\text{opt}}(t) &= A_i p(t) * p(T-t) \\
 & &= A_i p(t) * p(-t) * \delta(t-T) \\
 & &= A_i R_p(t) * \delta(t-T) = A_i R_p(t-T)
 \end{aligned}$$

**Observación**

$$\begin{aligned}
 z &= a_i + n_0 \\
 a_i &= a_i(t=T) = A_i R_p(0) = A_i E_p
 \end{aligned}$$

donde  $E_p$  es la energía de  $p(t)$ .

De acuerdo con esto, se calculan las *verosimilitudes*:

$$\begin{aligned}
 p(n_0) &= N(0, \sigma_0^2) \\
 p(z|a_i) &= N(A_i E_p, \sigma_0^2)
 \end{aligned}$$

**Señal 4-PAM**

Se tienen, pues, tres umbrales para decidir entre cuatro hipótesis.

**Regla de decisión**

$$\begin{aligned}
 \text{si } z < \gamma_1 &\Rightarrow H_0 \\
 \text{si } \gamma_1 < z < \gamma_2 &\Rightarrow H_1 \\
 \text{si } \gamma_2 < z < \gamma_3 &\Rightarrow H_2 \\
 \text{si } z > \gamma_3 &\Rightarrow H_4
 \end{aligned}$$

**Probabilidad de error**

$$p(e) = p(s_1)p(e|s_1) + p(s_2)p(e|s_2) + p(s_3)p(e|s_3) + p(s_4)p(e|s_4)$$

$$\begin{aligned}
 p(e|s_1) &= p(e|s_4) \\
 p(e|s_2) &= p(e|s_3)
 \end{aligned}$$

En general

$$P_b = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} \cdot Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2 M}{(M^2-1)} \cdot \left( \frac{E_b}{N_0} \right)} \right)$$

Como se puede comprobar, para  $M = 2$ , se tiene la expresión que ya vimos para el caso binario.



# Capítulo 9

## Transmisión digital paso banda

### Aplicaciones de los sistemas paso bajo

- Ethernet (LAN sobre coaxial). Modulación PAN binaria (pulsos muy fáciles de sincronizar).
- RDSI (4-PAM a 160 Kbps).
- Sistemas portadores (telefonía; PAM binario).
- Grabación en soportes magnéticos (disquetes) y ópticos (cd-ROM).

### Aplicaciones de los sistemas paso banda

- Canal telefónico convencional.
- Radiocomunicaciones.

## 9.1. Modulación de amplitud (ASK)

Las siglas **ASK** son las iniciales de Amplitude Shift Keying. Es un sistema muy parecido a PAM pero en el que los pulsos transmitidos se multiplican por un coseno para trasladarlos en frecuencia.

$$\begin{aligned}
s_i(t) &= A_i p(t) \cos \omega_0 t \\
A_i &= (2i - 1 - M) \quad i = 0, \dots, M - 1 \\
P(\omega) &= TF[p(t)] \quad (\text{paso bajo}) \\
S_i(\omega) &= \frac{A_i}{2} p(\omega - \omega_0) - \frac{A_i}{2} p(\omega + \omega_0) \quad (\text{paso banda})
\end{aligned}$$

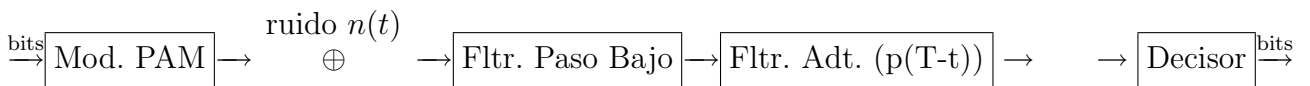
Si utilizamos pulsos de Nyquist:

$$p(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$$

La ventaja que supone utilizarlos es que su TF es un pulso, una señal mucho más localizada<sup>1</sup>.

### 9.1.1. Sistemas de transmisión M-ASK

Se puede construir a partir de un PAM:



## 9.2. Modulación PSK

Las siglas **PSK** son las iniciales de Phase Shift Keying.

$$\begin{aligned}
s_i(t) &= p(t) \cos(\omega_0 t + \phi_i) \\
\phi_i &= \frac{2\pi}{M} i \quad i = 0, \dots, M - 1
\end{aligned}$$

### Binary PSK (BPSK)

Es la particularización para el caso binario,  $M = 2$ .

$$\begin{aligned}
s_0(t) &= p(t) \cos \omega_0 t \\
s_1(t) &= p(t) \cos(\omega_0 t + \pi) = -p(t) \cos \omega_0 t
\end{aligned}$$

En este tipo de modulación, pues, la información va en la fase (de ahí su nombre)<sup>2</sup>. Además, modular en fase en binario es lo mismo que modular en amplitud, pues, como vemos, cambiar la fase en  $\pi$  es como cambiar la amplitud  $\times -1$ .

<sup>1</sup>Ver transparencias.

<sup>2</sup>Fase 0  $\Rightarrow$  "0", Fase  $\pi$   $\Rightarrow$  "1".

**Caso cuaternario**

Cuando  $M = 4$ :

$$\phi_0 = 0 \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \phi_2 = \pi \quad \phi_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Igual que en la modulación ASK, PSK tampoco modifica el ancho de banda:

$$P(\omega) = TF[p(t)]$$

$$s_i(t) = \frac{1}{2}p(t)e^{j\omega_0 t}e^{j\phi_i} + \frac{1}{2}p(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\phi_i}$$

$$S_i(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\phi_i}P(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi_i}P(\omega - \omega_0)$$

Desplaza el espectro, pero no lo modifica.

**9.2.1. Transmisor PSK**

Usando que

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

podemos escribir

$$s_i(t) = p(t) \cos \omega_0 t \cdot \cos \phi_i - p(t) \sin \omega_0 t \cdot \sin \phi_i$$

$$s_i(t) = \cos \phi_i \cdot p(t) \cos \omega_0 t - \sin \phi_i \cdot p(t) \sin \omega_0 t$$

### 9.2.2. Receptor PSK

## 9.3. Modulación QAM

Las siglas **QAM** son las iniciales de Quadrature Amplitude Modulation. En este tipo de modulación se modulan al mismo tiempo la amplitud y la fase:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A_i p(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_i) \\ &= A_i \cos \phi_i p(t) \cos \omega_0 t - A_i \sin \phi_i p(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

## 9.4. Modulación FSK

Las siglas **FSK** son las iniciales de Frequency Shift Keying. Se modula en frecuencia.

$$\begin{aligned} s_i(t) &= p(t) \cos \omega_i t \\ \omega_i &= \omega_0 + \frac{2i + 1 - M}{2} \Delta\omega \quad i = 0, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_0 &\equiv \text{frecuencia de portadora} \\ \Delta\omega &\equiv \text{desviación de frecuencia} \end{aligned}$$

Una modulación FSK queda, pues, caracterizada por estos dos parámetros.

### Caso binario

$$\begin{aligned} s_0(t) &= p(t) \cos \left( \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \\ s_1(t) &= p(t) \cos \left( \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

Nunca se puede conseguir señalización antipodal modificando  $\Delta\omega$ , pues por mucho que se aumente o disminuya, nunca se conseguirá que  $s_0(t)$  y  $s_1(t)$  sean iguales y de signos opuestos. Por el contrario, es fácil conseguir la ortogonal, pues si  $p(t)$  es un pulso rectangular de duración  $T$ ,  $\Delta\omega T = k\pi$  y  $\omega_0 \gg 1$ , entonces  $\rho = 0$  y por tanto se tiene señalización ortogonal.

Como sabemos, esto supondrá que si queremos tener el mismo error que tendríamos con señalización antipodal, necesitaremos el doble de relación señal a ruido  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ .

### Caso cuaternario

Para  $M = 4 \dots$

$$\begin{aligned} s_0(t) &= p(t) \cos\left(\omega_0 - \frac{3\Delta\omega}{2}\right)t \\ s_1(t) &= p(t) \cos\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \\ s_2(t) &= p(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \\ s_3(t) &= p(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{3\Delta\omega}{2}\right)t \end{aligned}$$

#### 9.4.1. Inconvenientes

Los principales inconvenientes de la modulación en frecuencia, FSK, son:

- Se necesita mayor relación señal a ruido  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ .
- Se necesita más ancho de banda.

#### 9.4.2. Ventajas

Por contra, las ventajas que la han hecho tan popular (y que, por tanto, deducimos que compensan sus inconvenientes) son:

- La envolvente es siempre constante, lo que hace que la señal sea muy fácil de amplificar.
- Es más robusta frente a interferencias.



# Índice general

<b>0. Presentación</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción a las comunicaciones digitales</b>	<b>7</b>
1.1. Concepto de comunicación . . . . .	7
1.2. Conexión de dos microprocesadores . . . . .	9
1.2.1. Conexión de dos micros a corta distancia (50 m.) . . . . .	9
1.2.2. Conexión de dos micros a larga distancia . . . . .	9
<b>2. Conceptos básicos de señales y sistemas</b>	<b>11</b>
2.1. Definición de señal y sistema . . . . .	11
2.2. Señales continuas y discretas . . . . .	11
2.3. Señales reales y complejas . . . . .	11
2.4. Señales de energía finita y potencia media finita . . . . .	12
2.5. Señales deterministas y aleatorias . . . . .	13
2.6. Operaciones básicas con señales . . . . .	13
2.6.1. Desplazamiento en tiempo . . . . .	13
2.6.2. Inversión en tiempo . . . . .	14
2.6.3. Escalado en tiempo . . . . .	14
2.6.4. Multiplicación por una constante . . . . .	14
2.6.5. Suma de señales . . . . .	15
2.6.6. Producto de señales . . . . .	15
2.7. Señales periódicas y no periódicas . . . . .	15
2.8. Señales elementales . . . . .	16
2.8.1. Pulso rectangular . . . . .	16
2.8.2. Escalón unidad . . . . .	17
2.8.3. Señal signo . . . . .	17
2.8.4. Señal rampa . . . . .	17
2.8.5. Señal sinc(t) . . . . .	18
2.8.6. Impulso unidad . . . . .	18
2.8.7. Señales exponenciales . . . . .	20
2.9. Concepto de sistema . . . . .	22
2.10. Interconexión de sistemas . . . . .	22
2.10.1. Interconexión de sistemas en Serie . . . . .	22
2.10.2. Interconexión de sistemas en Paralelo . . . . .	23
2.10.3. Interconexión Realimentada de sistemas . . . . .	23
2.11. Propiedades de los sistemas . . . . .	23
2.11.1. Memoria . . . . .	23
2.11.2. Invertibilidad . . . . .	23
2.11.3. Causalidad . . . . .	24

2.11.4. Estabilidad . . . . .	24
2.11.5. Invarianza en el tiempo . . . . .	25
2.11.6. Linealidad . . . . .	25
<b>3. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo</b>	<b>27</b>
3.1. Representación de una señal en términos de impulsos . . . . .	27
3.2. Respuesta al impulso y suma de convolución . . . . .	28
3.3. Integral de convolución . . . . .	29
3.4. Propiedades de la convolución . . . . .	30
3.4.1. Conmutativa . . . . .	30
3.4.2. Distributiva respecto de la suma . . . . .	31
3.4.3. Asociativa . . . . .	31
3.4.4. Elemento unitario . . . . .	32
3.4.5. Elemento neutro . . . . .	32
3.5. Propiedades de los sistemas LTI . . . . .	32
3.5.1. Invertibilidad . . . . .	32
3.5.2. Causalidad . . . . .	32
3.5.3. Memoria . . . . .	33
3.5.4. Estabilidad . . . . .	33
<b>4. Análisis Fourier de señales y sistemas continuos</b>	<b>35</b>
4.1. Respuesta en frecuencia de un sistema LTI . . . . .	35
4.2. Concepto de Transformada de Fourier . . . . .	36
4.3. Respuesta de un sistema LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas . . . . .	36
4.4. Propiedades de la convolución . . . . .	37
4.5. Consideraciones matemáticas de la TF . . . . .	38
4.5.1. Unicidad . . . . .	38
4.5.2. Convergencia . . . . .	38
4.6. TF de algunas señales básicas . . . . .	38
4.6.1. Exponencial decreciente . . . . .	38
4.6.2. Exponencial bilateral . . . . .	39
4.6.3. Pulso rectangular . . . . .	39
4.6.4. Impulso unidad $\delta(t)$ . . . . .	40
4.7. Propiedades de la TF . . . . .	41
4.7.1. Linealidad . . . . .	41
4.7.2. Inversión en tiempo . . . . .	41
4.7.3. Conjugación en tiempo . . . . .	41
4.7.4. Desplazamiento en tiempo . . . . .	42
4.7.5. Escalado en tiempo . . . . .	42
4.7.6. Derivación en tiempo . . . . .	42
4.7.7. Integración en tiempo . . . . .	42
4.8. Relación de Parseval . . . . .	43
4.8.1. Densidad espectral de energía . . . . .	43
4.9. Función de Autocorrelación . . . . .	43
4.9.1. Propiedades de la F.A. . . . .	44
4.10. Dualidad de la T.F. . . . .	45
4.10.1. Propiedades duales . . . . .	46
4.11. Propiedad de Modulación . . . . .	47

4.12. Concepto de Multiplexación en Frecuencia . . . . .	47
<b>5. Representación digital de señales analógicas</b>	<b>49</b>
5.1. Operación de Muestreo . . . . .	49
5.2. El Fenómeno de Solapamiento (Aliasing) . . . . .	52
5.3. Cuantificación . . . . .	52
5.4. Codificación . . . . .	52
5.4.1. PCM . . . . .	52
5.4.2. Otras técnicas . . . . .	53
<b>6. Fundamentos de Transmisión Digital</b>	<b>55</b>
6.1. Modelo de Sistema de Comunicaciones Digital . . . . .	55
6.1.1. Fuente . . . . .	55
6.1.2. Modulador . . . . .	55
6.1.3. Canal . . . . .	57
6.1.4. Demodulador . . . . .	57
6.1.5. Destino . . . . .	58
6.2. Sistema de Transmisión PAM . . . . .	58
6.2.1. Transmisión PAM por canales de banda limitada . . . . .	59
6.2.2. Ancho de banda equivalente rectangular . . . . .	60
<b>7. Introducción a Procesos Estocásticos</b>	<b>61</b>
7.1. Concepto de Proceso Estocástico . . . . .	61
7.2. Descripción Estadística de una V.A. . . . .	62
7.2.1. Descripción Completa . . . . .	62
7.2.2. Descripción Parcial . . . . .	62
7.3. Descripción Estadística de un Proceso Estocástico . . . . .	63
7.4. Procesos Estacionarios . . . . .	63
7.5. Propiedades de la Función de Autocorrelación . . . . .	64
7.6. Densidad Espectral de Potencia . . . . .	65
7.6.1. Propiedades de la Densidad Espectral de Potencia . . . . .	65
7.7. Ejemplos . . . . .	66
<b>8. Transmisión digital por canales con ruido</b>	<b>67</b>
8.1. Modelo . . . . .	67
8.1.1. Modelo de ruido . . . . .	67
8.2. Detección de señales binarias en ruido gaussiano . . . . .	68
8.3. Señalización ortogonal y antipodal . . . . .	77
8.3.1. Señalización ortogonal . . . . .	77
8.3.2. Señalización antipodal . . . . .	77
8.4. Transmisión multinivel por canales con ruido . . . . .	79
8.4.1. Sistema de transmisión M-PAM . . . . .	79
<b>9. Transmisión digital paso banda</b>	<b>83</b>
9.1. Modulación de amplitud (ASK) . . . . .	83
9.1.1. Sistemas de transmisión M-ASK . . . . .	84
9.2. Modulación PSK . . . . .	84
9.2.1. Transmisor PSK . . . . .	85
9.2.2. Receptor PSK . . . . .	86

9.3. Modulación QAM . . . . .	86
9.4. Modulación FSK . . . . .	86
9.4.1. Inconvenientes . . . . .	87
9.4.2. Ventajas . . . . .	87